Feluppskattning för konvergens mot asymptotisk fördelning

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Ht 2001

Här presenteras en användbar och lättanvänd feluppskattning för felet man gör då man approximerar en sanna fördelningen för en ergodisk Markovkedja med den asymptotiska fördelningen. Den bygger på att vi konstruerar ett avståndsmått mellan sannolikhetsfördelningar och sen visar (under ett praktiskt och lättverifierat villkor) att ett tidssteg framåt i tiden ger en avbildning som är kontraktiv.

Sats: Låt $m_j = \min_{i \in E} p_{ij}$, dvs att m_j är minimum (infimum) av kolonn j i övergångsmatrisen P. Om $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i,\ i \in E)$ är den asymptotiska fördelningen så gäller oavsett fördelningen för X_0 (initialfördelningen)

$$\sum_{i \in E} |P(X_n = i) - \pi_i| \leq 2(1 - \sum_{j \in E} m_j)^n.$$

Speciellt ser vi att $|P(X_n = i) - \pi_i| \leq 2(1 - \sum_{j \in E} m_j)^n$. Vidare betyder detta att om någon kolonn i P är strikt positiv så att $1 - \sum_{j \in E} m_j < 1$ så går felet mot 0 exponentiellt snabbt i n.

Exempel: Med matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/9 & 2/9 \\ 1/9 & 2/3 & 2/9 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

som har stationära (och asymptotiska) fördelningen $\boldsymbol{\pi} = (0.3, 0.3, 0.4)$ får man $m_1 = 1/9$, $m_2 = 1/9$ och $m_3 = 2/9$ och alltså $1 - \sum_{j \in E} m_j = 1 - 4/9 = 5/9$ och alltså $|P(X_n = i) - \pi_i| \leq 2(5/9)^n$ som för $n = 50$ ger maximala felet $3.45 \cdot 10^{-13}$ för t ex $P(X_{50} = 1) - 0.3$. Om man i t ex Matlab beräknar P^{50} får man att t ex $P(X_{50} = 1 | X_0 = 1) - 0.3 = 0.8567 \cdot 10^{-13}$, dvs att den erhållna feluppskattningen är mycket skarp.

För att erhålla resultat i satsen inför vi normen $||\boldsymbol{x}|| = \sum_{i \in E} |x_i|$ för vektorer $\boldsymbol{x} = (x_i,\ i \in E)$. Avståndet mellan $\boldsymbol{x} = (x_i,\ i \in E)$ och $\boldsymbol{y} = (y_i,\ i \in E)$ är alltså $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| = \sum_{i \in E} |x_i - y_i|$. Speciellt är vi intresserade av detta när vektorerna är sannolikhetsvektorer, dvs beskriver sannolikhetsfördelningar på E. Detta avstånd brukar ofta kallas "totalvariationsavståndet". Vi ser att för sannolikhetsvektorer är $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|| \leq 2$ enligt triangelolikheten och eftersom $\sum_{i\in E} x_i = 1$ och $\sum_{i\in E} y_i = 1$.

Vad som nu är intressant är att om vi startar kedjan med två olika initialfördelningar $\boldsymbol{p}$ respektive $\boldsymbol{q}$ som har avståndet $||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||$ och stegar ett tidssteg framåt och alltså har fördelningen $\boldsymbol{p}P$ respektive $\boldsymbol{q}P$ så gäller att

$$||\boldsymbol{p}P - \boldsymbol{q}P|| \leq (1 - \sum_{j\in E} m_j)||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||$$

vilket vi strax skall visa. Man brukar kalla P en kontraktiv avbildning då den minskar avståndet med en sådan faktor när denna är < 1. Detta betyder att

$$||\boldsymbol{p}P^n - \boldsymbol{q}P^n|| \leq (1 - \sum_{j\in E} m_j)^n||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||$$

som innebär att om vi låter $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\pi}$=stationära fördelningen och noterar att $||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{\pi}|| \leq 2$ så erhålls feluppskattningen i satsen.

Återstår att visa att avbildningen P är kontraktiv. Vi får

$$||\boldsymbol{p}P - \boldsymbol{q}P|| = \sum_{j\in E} |(\boldsymbol{p}P)_j - (\boldsymbol{q}P)_j| = \sum_{j\in E} |\sum_{i\in E} p_i p_{ij} - \sum_{i\in E} q_i p_{ij}| =$$

$$\sum_{j\in E} |\sum_{i\in E} (p_i - q_i)p_{ij}|.$$

Man ser att $\sum_i (p_i - q_i)a = a\sum_i (p_i - q_i) = a(1-1) = 0$ så vi kan subtrahera ett godtyckligt tal från p_{ij} i uttrycket ovan och erhåller om vi drar bort a_j att

$$||\boldsymbol{p}P - \boldsymbol{q}P|| = \sum_{j\in E} |\sum_{i\in E} (p_i - q_i)(p_{ij} - a_j)| \leq \sum_{i\in E} |p_i - q_i| \sum_{j\in E} |p_{ij} - a_j|.$$

Vi tar nu som $a_j = m_j = \min_{i\in E} p_{ij}$ dvs som j:te kolonnens minimum och inser då att $p_{ij} - m_j \geq 0$ så $|p_{ij} - m_j| = p_{ij} - m_j$ och vi får

$$||\boldsymbol{p}P - \boldsymbol{q}P|| \leq \sum_{i\in E} |p_i - q_i| \sum_{j\in E} (p_{ij} - m_j) = \sum_{i\in E} |p_i - q_i|(1 - \sum_{j\in E} m_j) =$$

$$||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||(1 - \sum_{j\in E} m_j).$$

Man kan använda ovanstående teknik för att visa att om någon kolonn är strikt positiv så är kedjan ergodisk. Skulle ingen kolonn i P vara strikt positiv, dvs att alla $m_j = 0$, kan man studera P^k för något k och hoppas att denna matris har någon kolonn med minimum> 0. Vi får då med $m_j^{(k)}$ =minimum av j:te kolonnen i P^k

$$||\boldsymbol{p}P^n - \boldsymbol{\pi}|| = ||\boldsymbol{p}P^{n-k[n/k]}(P^k)^{[n/k]} - \boldsymbol{\pi}|| = ||\boldsymbol{p}'(P^k)^{[n/k]} - \boldsymbol{\pi}|| \leq 2(1 - \sum_{j\in E} m_j^{(k)})^{[n/k]}$$

där $[a]$ =heltalsdelen av a och $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}P^{n-k[n/k]}$.