Om lösning av ekvationssystem för stationär fördelning

Ht 2002

Då man har en Markovkedja med ändligt tillståndsrum E i diskret tid med övergångsmatris $\boldsymbol{P}$ som bara har en enda sluten irreducibel delklass så vet vi att det finns en unik stationär fördelning $\boldsymbol{\pi}$ som uppfyller $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$ och $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$. I det resulterande ekvationssystemet kan vilken som helst av ekvationerna som ingår i $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$ strykas för att erhålla ett ekvationssystem med lika många ekvationer som obekanta. Om vi låter $|E|$ vara antalet element i E har vi ju ursprungligen $|E|$ obekanta och $|E| + 1$ ekvationer.

För kedjor med oändligt tillståndsrum E gäller samma sak, dvs om det finns en stationär fördelning (man kan ju för oändliga kedjor inte vara säker på att det finns någon stationär fördelning - kedjan kan ju driva ut mot oändligheten) så kan man stryka vilken ekvation som helst från $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$.

Ett bevis för detta är följande. Antag att $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i,\ i \in E)$ är en stationär fördelning och att

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} \text{ för alla } j \neq k$$

dvs att alla ekvationer utom nr k är uppfylld. Vi vill då visa att ekvationen för k också är uppfylld. Vi får

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in E} \pi_i p_{ik} = (\text{utnyttja att radsumman är 1}) = \sum_{i \in E} \pi_i (1 - \sum_{r \in E, r \neq k} p_{ir}) = \\
&\sum_{i \in E} \pi_i - \sum_{i \in E} \sum_{r \in E, r \neq k} \pi_i p_{ir} = (\text{kasta om summationsordning}) = \\
&1 - \sum_{r \in E, r \neq k} \sum_{i \in E} \pi_i p_{ir} = (\text{utnyttja att ekvationen är uppfylld för } r \neq k) = \\
&1 - \sum_{r \in E, r \neq k} \pi_r = \pi_k.
\end{aligned}$$

Alltså är även ekvation k uppfylld.

Man ser på samma sätt att man kan stryka en godtycklig ekvation (utom normeringsekvationen) då man vill hitta den stationära fördelningen i kontinuerlig tid, dvs då vi vill lösa ekvationssystemet $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{Q}$. Vi antar alltså som ovan att vi ser till att alla ekvationer utom nr k är uppfyllda, dvs att

$$0 = \sum_{i \in E} \pi_i q_{ij} \text{ för alla } j \neq k.$$

Vi får då

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in E} \pi_i q_{ik} = (\text{radsumma } 0) = \sum_{i \in E} \pi_i (-\sum_{r \neq k} q_{ir}) = \\ &-\sum_{r \neq k} \sum_{i \in E} \pi_i q_{ir} = (\text{ekvationen uppfylld för alla } r \neq k) = 0 \end{aligned}$$

vilket visar att ekvation k också är uppfylld.