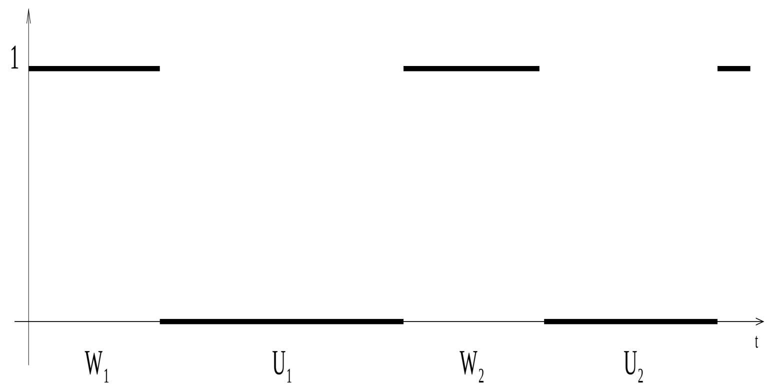
Om ergodicitet i Markovprocesser och användning av cykler

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Ht 2002



Figur 1: $I(X(t) = i)$ dvs variabeln som indikerar om processen är i tillstånd i eller ej.

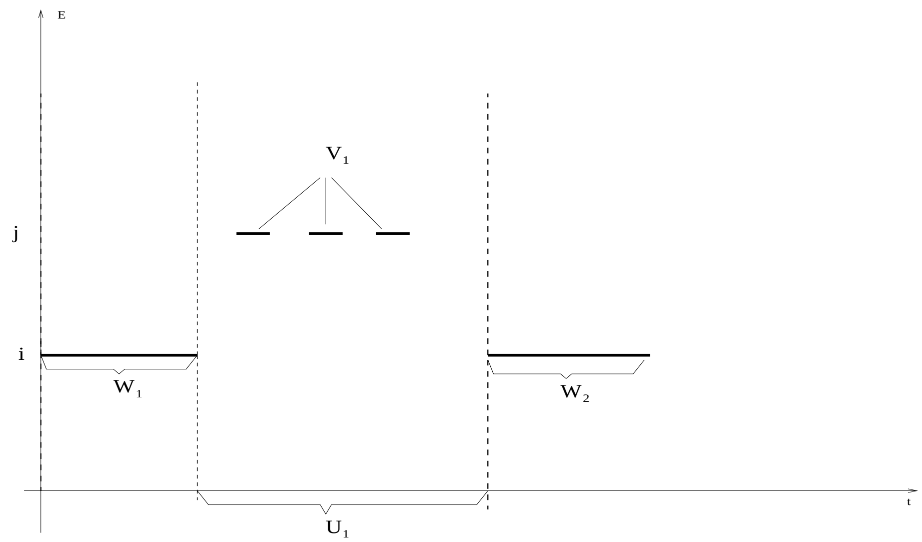
En Markovprocess $(X(t);\ t \geq 0)$ i kontinuerlig tid säges ju vara ergodisk om $\lim_{t\to\infty} P(X(t) = i) = \pi_i$ för $i \in E$ för en fix sannolikhetsfördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i,\ i \in E)$ oavsett startfördelning. Man kan visa att detta betyder att tidsmedelvärden överensstämmer (med sannolikhet 1) med ensemblemedelvärden dvs att man får π_i genom att titta på andelen av ett långt tidsintervall som processen ligger i tillstånd i dvs att man har

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(X(u) = i)du$$

där $I(X(t) = i) = 1$ om $X(t) = i$ och 0 annars. Se figur 1. Integralen kan ju tolkas som andelen av tiden som processen ligger i tillstånd i.

Vi fixerar nu ett tillstånd i och betraktar en cykel, dvs tiden från det att processen går in i i, ligger i i en stund, sedan lämnar i och besöker att antal tillstånd innan den återvänder till i. Vi låter W_1 vara tiden man ligger i i

och U_1 tiden man besöker andra tillstånd innan man återvänder till i. Vidare låter vi V_1 vara den sammanlagda tiden man under utflykten ligger i j. Dessa storheter framgår av figur 2!



Figur 2: Definition av tider i en cykel.

I nästa cykel kallar vi motsvarande storheter W_2, U_2 och V_2 osv. Enligt Markovegenskapen är $W_1, W_2, \cdots$ oberoende likafördelade och på motsvarande sätt är $U_1, U_2, \cdots$ oberoende likafördelade (de är t o m alla oberoende). Vidare är $V_1, V_2, \cdots$ oberoende likafördelade och de är t o m oberoende av $W_1, W_2, \cdots$ medan naturligtvis V-na och U-na är beroende.

Enligt stora talens lag gäller att $\bar{W}_n = \frac{1}{n}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n)$ konvergerar mot $E(W)$ (med sannolikhet 1) då $n \to \infty$ och på motsvarande sätt kommer $\bar{W}_n + \bar{U}_n \to E(W + U)$ då $n \to \infty$ och vi erhåller

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(X(u) = i) du =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{W_1 + U_1 + W_2 + U_2 + \cdots + W_n + U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\bar{W}_n}{\bar{W}_n + \bar{U}_n} = \frac{E(W)}{E(W) + E(U)}$$

som ju ger

$$\pi_i = \frac{1/q_i}{E(T_i)}$$

där $1/q_i = E(W)$ är förväntad uppehållstid i tillståndet i och $E(T_i) = E(W + U)$ är förväntad tid mellan två inträden i tillstånd i.

På samma sätt ser vi att

$$\bar{V}_n = \frac{\bar{V}_n}{\bar{W}_n + \bar{U}_n} \cdot \frac{\bar{W}_n + \bar{U}_n}{\bar{W}_n} \cdot \bar{W}_n \to \frac{\pi_j}{\pi_i} \cdot \frac{1}{q_i}$$

och eftersom $\bar{V}_n = E(V)$ då $n \to \infty$ erhåller vi resultatet att $E(V) = \pi_j/(\pi_i q_i)$ där alltså $E(V)$=förväntad tid processen tillbringar i tillstånd j mellan två besök i tillstånd i.