Om ergodicitet i Markovprocesser och användning av cykler - diskret tid

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2003

En Markovprocess $(X_n;\ n \geq 0)$ i diskret tid säges ju vara ergodisk om $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i$ för $i \in E$ för en fix sannolikhetsfördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i,\ i \in E)$ oavsett startfördelning. Man kan visa att detta betyder att tidsmedelvärden överensstämmer (med sannolikhet 1) med ensemblemedelvärden dvs att man får π_i genom att titta på andelen av ett långt tidsintervall som processen ligger i tillstånd i dvs att man har

$$\pi_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I(X_k = i)$$

där $I(X_k = i) = 1$ om $X_k = i$ och 0 annars. Summan kan ju tolkas som antalet av tidpunkterna som processen ligger i tillstånd i och uttrycket alltså utgör andelen besök i i.

Vi fixerar nu tillståndet i och betraktar en cykel, dvs tiden från det att processen är i i och sen (eventuellt) besöker ett antal andra tillstånd innan den åter är i. Vi låter $T_i^{(1)}$ vara antalet tidpunkter tills man återvänder till i. Notera att om kedjan ligger kvar i i är $T_i^{(1)} = 1$. Vidare låter vi $V_{j(i)}^{(1)}$ vara det sammanlagda antalet tidpunkter man under utflykten ligger i j för ett fixerat tillstånd $j \neq i$. Med beteckningar från formelsamlingen är T_i=tiden mellan två besök i tillstånd i där det ena besöket i i räknats med.

I nästa cykel kallar vi motsvarande storheter $T_i^{(2)}$ och $V_{j(i)}^{(2)}$ osv. Enligt Markovegenskapen är $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, , \cdots$ oberoende likafördelade. Vidare är $V_{j(i)}^{(1)}, V_{j(i)}^{(2)}, \cdots$ oberoende likafördelade medan de naturligtvis är beroende av motsvarande T_i:n.

Enligt stora talens lag gäller att

$$\bar{T}_i^{(n)} = \frac{T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \cdots + T_i^{(n)}}{n} \to E(T_i) \text{ då } n \to \infty$$

och vi erhåller

$$\pi_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I(X_k = i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{T_i^{(1)} + T_i^{(2)} \cdots + T_i^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\bar{T}_i^{(n)}} = \frac{1}{E(T_i)}.$$

dvs

$$\pi_i = \frac{1}{E(T_i)}$$

På samma sätt ser vi att

$$\bar{V}_{j(i)}^{(n)} = \frac{\bar{V}_{j(i)}^{(n)}}{\bar{T}_i^{(n)}} \cdot (\bar{T}_i^{(n)}) \to \frac{\pi_j}{\pi_i}$$

där vi utnyttjat att

$$\frac{\bar{V}_{j(i)}^{(n)}}{\bar{T}_i^{(n)}} = \frac{V_{j(i)}^{(1)} + V_{j(i)}^{(2)} + \cdots + V_{j(i)}^{(n)}}{T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \cdots + T_i^{(n)}} \to \pi_j$$

eftersom det är andelen av tiden (över n st i-cykler) vi ligger i tillstånd j.

Eftersom $\bar{V}_{j(i)}^{(n)} \to E(V_{j(i)})$ då $n \to \infty$ erhåller vi resultatet att $E(V_{j(i)}) = \pi_j/\pi_i$ där alltså $E(V_{j(i)})$=förväntat antal tidpunkter processen tillbringar i tillstånd j mellan två besök i tillstånd i.