Tolkning av övergångsintensitetsmatris

Följande resultat och resonemang är av relevans för hur man kan uppfatta övergångsintensitetsmatrisen Q för en diskret Markovprocess i kontinuerlig tid.

Låt $T_1, T_2, \cdots, T_n$ vara oberoende stokastiska variabler där T_j är Exp(λ_j), $j = 1, 2, \cdots, n$.

Låt vidare $T = \min(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ dvs T är den minsta av T_i:na och $L = j$ om T_j är minst av $T_1, T_2, \cdots, T_n$. Alltså är T den minsta och L numret på den minsta av $T_1, T_2, \cdots, T_n$.

Först kan man notera att L är väldefinierad (med sannolikhet 1) eftersom $T_1, T_2, \cdots, T_n$ har kontinuerliga fördelningar så sannolikheten för "dubbelträff" är 0.

Följande tre påstående är sanna

a) T är Exp($\sum_1^n \lambda_i$)

b) $P(L = j) = \dfrac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$

c) T och L är oberoende stokastiska variabler.

Kommentar: Detta kan i en Markovprocess tolkas som att det från ett visst tillstånd finns "virtuella" hopptider $T_1, T_2, \cdots, T_n$ (som är oberoende exponentialfördelade) till ett antal olika tillstånd och det hopp som i verkligheten blir av är till det tillstånd som hör ihop med den minsta av dessa "virtuella" hopptider. L är alltså vart man hoppar och T är tiden då man hoppar. Dessa är alltså oberoende och sannolikheten att hoppa till de olika tillstånden är proportionell mot de olika λ_j:na. Uppehållstiden har ett väntevärde som är $1/\sum_i^n \lambda_i$ dvs 1/summan av icke-diagonalelementen i Q.

Bevis:

a) Vi har

$$P(T \le t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\min(T_1, T_2, \cdots, T_n) = 1 - P(T_1 > t; T_2 > t; \cdots; T_n > t) =$$

$$= (\text{oberoendet}) = 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) \cdots P(T_n > t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \cdots e^{-\lambda_n t} =$$

$$= 1 - \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

Detta innebär att T är Exp($\sum_i^n \lambda_i$).

b) Vi konstaterar först att om U och V är oberoende Exp(λ) respektive Exp(μ) så gäller att

$$P(U < V) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

ty

$$P(U < V) = \int_0^\infty du \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu v} dv = \int_0^\infty du \lambda e^{-\lambda u} \big[-e^{-\mu v} \big]_u^\infty = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} e^{-\mu u} du =$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)u} du = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Detta ger nu tillämpat med $U = T_j$ och $V = \min(T_1, T_2, \cdots, T_{j-1}, T_{j+1}, \cdots, T_n)$ som är Exp(λ_j) respektive Exp$(\sum_{i \neq j} \lambda_i)$ att

$$P(L = j) = P(T_j = T) = P\left(T_j = \min(T_1, T_2, \cdots, T_n)\right) =$$

$$= P\left(T_j < \min(T_1, T_2, \cdots T_{j-1}, T_{j+1}, \cdots, T_n)\right) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i} = \frac{\lambda_j}{\sum_i^n \lambda_i}$$

c) När vi skall visa att L och T är oberoende så skall vi alltså visa att

$$P(L = j; T \leq t) = P(L = j)P(T \leq t).$$

Notera att $\{L = j; T \leq t\}$ betyder T_j är den minsta och att $T_j \leq t$. Alltså får vi

$$P(L = j; T \leq t) = P\left(T_j \leq t; T_j < \min(T_1, T_2, \cdots, T_{j-1}, T_{j+1}, \cdots, T_n)\right) = \text{(rita figur)} =$$

$$\int_0^t du \int_u^\infty \lambda_j \exp\left(-\lambda_j u\right) \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i\right) \exp\left(-v \sum_{i \neq j} \lambda_i\right) dv =$$

$$= \lambda_j \int_0^t \exp\left(-\lambda_j u\right) \exp\left(-u \sum_{i \neq j} \lambda_i\right) du = \lambda_j \int_0^t \exp\left(-u \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) du =$$

$$= \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \left(1 - \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\right) = P(L = j)P(T \leq t)$$

eftersom vi visste från a)-delen att T är Exp$(\sum_i^n \lambda_i)$. Alltså har vi visat c)-delen.

Resultatet i c)-delen är kanske det mest förvånande. Eftersom de olika T_j:na har olika intensiteter (dvs olika väntevärden) skulle man möjligen kunna förledas att tro att det finns information om vilken som blev minst av att få veta hur liten den minsta blev. Detta är alltså inte fallet! Kontentan av c)-delen vad gäller Markovprocesser är att hur länge man ligger i ett tillstånd och vart man hoppar är oberoende av varandra. Man kan därför (t ex vid simulering av en Markovprocess) först ta fram en uppehållstid i det aktuella tillståndet (vars intensitet=1/väntevärde anges av (minus) diagonalelementet i Q-matrisen) och sen oberoende lotta om vart man ska hoppa och då göra det med sannolikheter proportionella mot övergångsintensiteterna, dvs elementen vid sidan av diagonalen i Q-matrisen för den aktuella raden.