För-första-gången-fördelning, binomialfördelning, hypergeometrisk fördelning; uppkomstsätt

De tre fördelningarna för-första-gången-fördelning, binomialfördelning, och hypergeometrisk fördelning är tre fördelningar vars uppkomstsätt man skall kunna, d.v.s. veta hur de uppkommer i praktiken.

För första gången-fördelning, $X \in$ffg(p)

I ett försök inträffar en händelse A med sannolikhet p. Försöket upprepas tills A inträffar för första gången och vi antar att försöksutfallen är oberoende av varandra. Då är $X \in$ffg(p), dvs dess sannolikhetsfunktion är

$$p_x(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Av detta följer att $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = p(1-p)^n \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$. Vi har här utnyttjat den geometriska seriens summa. Ett enklare sätt att beräkna $P(X > n)$ är att konstatera att händelsen $X > n$ är densamma som händelsen att A^* inträffar i de n första försöken.

<u>Exempel</u>. En symmetrisk tärning kastas tills en sexa erhålls. Antalet kast, X, är då ffg(1/6).

<u>Exempel</u>. I en produktionsprocess blir enheterna, obereonde av varandra, felaktiga med sannolikhet 0.01. Om X är antalet enheter som tillverkas tills en felaktig enhet är $X \in$ffg(0.01)

<u>Exempel</u>. I en urna finns vita och svarta kulor. 40% av kulorna är vita. Kulor dras med återläggning, utfallen i olika försök blir då oberoende. Sätt X=antalet kulor som dras tills en vit kula erhålles. Då är $X \in$ffg(0.4)

Binomialfördelning

Samma situation som ovan. I ett försök inträffar en händelse A med sannolikhet p. Försöket upprepas n oberoende gånger. Låt X vara antalet gånger A inträffar. Då är $X \in$Bin(n, p), d.v.s. sannolikhetsfunktionen är

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

<u>Exempel</u>. En symmetrisk tärning kastas 10 gånger.Antalet sexor under dessa kast, X, är då Bin(10,1/6).

<u>Exempel</u>. I en produktionsprocess blir enheterna, oberoende av varandra, felaktiga med sannolikhet 0.01 och 300 enheter tillverkas. För X=antalet felaktiga enheter bland dessa gäller $X \in$Bin(300,0.01).

<u>Exempel</u>. I en urna finns vita och svarta kulor. 40% av kulorna är vita. 20 kulor dras <u>med</u> återläggning, utfallen i olika försök blir då oberoende. Om X är antalet vita kulor som dragits gäller $X \in$Bin(20,0.4).

Hypergeometrisk fördelning

En population har N element varav andelen p har egenskapen A. Man drar n element slumpmässigt utan återläggning. Låt X vara antalet element i urvalet som har egenskapen A. Då är $X \in$Hyp(N, n, p), d.v.s. sannolikhetsfunktionen är

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Exempel. I en produktionsprocess tillverkas 10000 enheter och 100 av dessa är felaktiga, d.v.s. andelen 0.01 är felaktiga. Man tar slumpmässigt ut 300 av de tillverkade enheterna, utan återläggning. Låt X vara antalet felaktiga enheter i urvalet är $X \in$Hyp$(10000, 300, 0.01)$.

Exempel. I en urna finns 80 vita och 120 svarta kulor. 20 kulor dras utan återläggning. Om X är sntalet vita kulor som dragits gäller $X \in$Hyp(200,20,0.4).