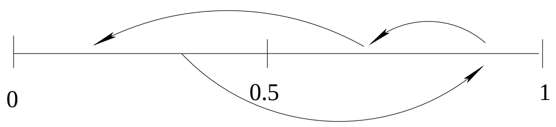
Markovprocesser i diskret tid och med kontinuerligt tillståndsrum

En Markovprocess kan mycket väl ha ett tillståndrum som inte är diskret (d.v.s. ändligt eller numrerbart oändligt) utan är kontinuerligt, t.ex. ett ändligt eller oändligt intervall. Att den stokastiska processen, i diskret tid, $\{X_n; n \geq 0\}$ är markovsk definieras på samma sätt i fallet då tillståndsrummet är diskret. Vi ger ett exempel.

Exempel. En partikel utför en slumpvandring i intervallet $(0, 1)$. Om den befinner sig i punkten x hoppar den till det största av intervallen till vänster respektive höger och med likformig fördelning. Det innebär att om partikeln befinner sig i tillstånd x, där $x > 0.5$ så hoppar den till punkten Y, där $Y \in R(0, x)$. Om $x \leq 0.5$ hoppar den till Y som istället är $R(1-x, 1)$, se figuren. Vi skall senare undersöka partikelns läge efter lång tid, d.v.s. beräkna den asymptotiska fördelningen.



Figur 1: Exempel på hopp i slumpvandringen

Om tillståndsrummet är diskret, anger p_{ij} sannolikheten för hopp från tillstånd i till tillstånd j. Om utfallsrummet är ett helt intervall motsvaras denna övergångssannolikhet av en övergångstäthet $P(x, y)$. För varje x är detta alltså täthetsfunktionen i y för hopp från tillståndet x till y. Om man vill beräkna tillståndet efter två hopp, gör man på liknande sått som i fallet diskret utfalls rum. I det fallet har vi enligt Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

dvs vi summerar övergångssannolikheterna över alla tillstånd. Om tillståndsrummet är kontinuerligt får vi istället integrera,

$$P^{(2)}(x, y) = \int P(x, z) P(z, y) dz$$

På liknande sätt om startfördelningen för X_0 ges av täthetfunktionen $p^{(0)}(x)$. Då erhålls täthetsfunktionen för tillståndet efter ett hopp av

$$p^{(1)}(y) = \int p^{(0)}(x) P(x, y) dx$$

analogt med fallet diskret utfallsrum (byt ut summa mot integral, övergångssannolikhet mot övergångstäthet).
En fördelning är stationär om lägesfördelningen är oförändrad efter ett hopp, d.v.s. om

$$\pi(y) = \int \pi(x) P(x, y) dx \tag{1}$$

Denna ekvation är en integralekvation som sedan måste lösas för att få den stationära fördelningen. Vi illustrerar med exemplet ovan.

Exempel forts. Övergångstätheterna ges av

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{om } x \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 0.5 \\ \frac{1}{x} & \text{om } 0 \leq y \leq x,\ \ 0.5 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Ekvationen (1) blir om $y \leq 0.5$

$$\pi(y) = \int_0^1 \pi(x)P(x,y)dx = \int_0^y \pi(x)\frac{1}{1-x}dx + \int_{0.5}^1 \pi(x)\frac{1}{x}dx \tag{2}$$

Denna integralekvation kan lösas genom derivering.

$$\pi'(y) = \pi(y)/(1-y)$$

En ordinär differentialekvation av första ordningen som är lätt att lösa. Lösningen är

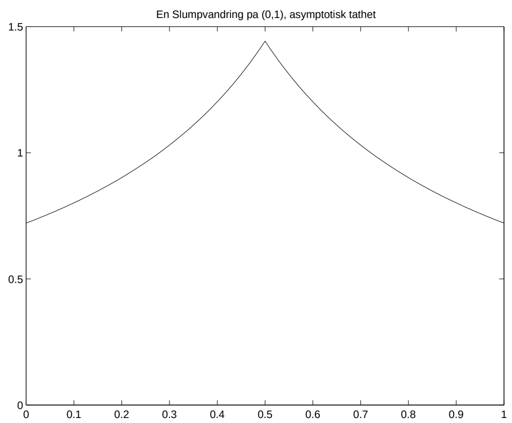
$$\pi(y) = C(1-y)^{-1}$$

Av symmetriskäl är lösningen $\pi(y) = Cy^{-1}$ om $y > 0.5$ Lösningen kan vara falsk men insättning i (2) ger att den erhållna lösningen verkligen är äkta. Konstanten C kan bestämmas eftersom $\pi(x)$ skall vara en täthetsfunktion. Vi får

$$1 = \int_0^1 \pi(x)dx = \int_0^{0.5} C(1-x)^{-1}dx + \int_{0.5}^1 Cx^{-1}dx = 2C\ln(2)$$

d.v.s. $C = \frac{1}{2\ln(2)}$. Man kan visa att Markovkedjan är ergodisk och den asymptotiska fördelningen är denna stationära fördelning, d.v.s den asymptotiska fördelningens täthet är

$$\pi(x) = \begin{cases} \big(2(1-x)\ln(2)\big)^{-1} & \text{om } 0 \leq x \leq 0.5 \\ \big(2x\ln(2)\big)^{-1} & \text{om } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$



Figur 2: Asymptotisk täthet för slumpvandringen