Problem 5B1509

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2005

1 Problem 1

En σ-algebra $\mathscr{F}$ är en familj delmängder till en mängd Ω sådan att

1) $\emptyset \in \mathscr{F}$.

2) Om $A \in \mathscr{F}$ så gäller att $A^* \in \mathscr{F}$.

3) Om $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ så gäller att $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

Lös följande problem:

a) Visa att $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$ om $A_i \in \mathscr{F}$ för $i = 1, 2, \ldots$.

b) Vilken är den minsta tänkbara σ-algebran på en mängd Ω?

c) Vilken är den största tänkbara σ-algebran på en mängd Ω?

d) Hur ser σ-algebran i c) ut om Ω är ändlig och bara består av m element? Hur många medlemmar har den?

e) Låt $\mathscr{F}_1$ och $\mathscr{F}_2$ vara två σ-algebror på en mängd Ω. Bilda $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ som står för alla mängder som ingår i bägge σ-algebrorna. Visa att $\mathscr{F}$ är en σ-algebra. Är $\mathscr{G} = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ säkert en σ-algebra (där alltså $\mathscr{G}$ består av alla delmängder som ingår i $\mathscr{F}_1$ och/eller $\mathscr{F}_2$)?

f) Givet en uppsättning mängder S (som typiskt inte är en σ-algebra) finns det en unik minsta σ-algebra som innehåller mängderna i S?
Ledning: Tänk på mängden av alla σ-algebror som innehåller mängderna i S.

g) Låt $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9\}$ och S bestå av de två delmängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Vad blir den minsta σ-algebran som innehåller S och hur många delmängder innehåller den?

h) Finns det någon oändlig men uppräknelig σ-algebra?
Förenklande antagande: Antag att det finns ett uppräkneligt antal disjunkta delmängder som ingår i σ-algebran.
Lite svårare uppgift: Försök visa att om σ-algebran består av oändligt många delmängder så är det förenklande antagandet sant.