

Problem 5B1509

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2005

1 Problem 2

1.1 Karaktäristisk funktion

Vi definierar den karaktäristiska funktionen för en stokastisk variabel (eller snarare för en fördelning) som

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) \text{ för } t \in R.$$

Några problem:

- a) Vad är den karaktäristiska funktionen för $Y = -X$?
- b) Visa att om $\phi(t)$, $t \in R$ är en karaktäristisk funktion till någon fördelning så är även $|\phi(t)|^2$, $t \in R$ en karaktäristisk funktion.
- c) Beräkna den karaktäristiska funktionen då X är $\text{Exp}(\lambda)$.

1.2 Konvergensbegrepp

Vi betraktar stokastiska variabler $X_1, X_2, \dots$.

Vi säger att X_n konvergerar mot X i sannolikhet om för varje $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Vi säger att X_n konvergerar mot X med sannolikhet 1 (nästan säkert) om det finns ett Ω_0 sådant att $P(\Omega_0) = 1$ och

$$\omega \in \Omega_0 \Rightarrow X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Vi säger att X_n konvergerar mot X i kvadratisk medel om

$$E((X_n - X)^2) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Några uppgifter:

- a) Visa att om X_n går mot X med sannolikhet 1 så går X_n mot X i sannolikhet.
- b) Visa att om X_n går mot X i kvadratisk medel så går X_n mot X i sannolikhet. Ledning: Tjebyschovs olikhet!
- c) Hitta ett exempel på att konvergens i sannolikhet inte medför konvergens i kvadratisk medel. Ledning: Ta variabler som är stora med allt mindre sannolikhet.
- d) Försök hitta ett exempel på att konvergens i sannolikhet inte medför konvergens med sannolikhet 1.