

Problem 5B1509

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2005

1 Problem 3

1.1 Teoretisk statistik

- 1) Visa att Poisson-fördelningen är av typen "exponentiell familj".
- 2) Antag att parametern θ har 3 tänkbara värden $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ och att den stokastiska variabeln Z har följande fördelning

$$P(Z = z_1) = 0.4, P(Z = z_2) = 0.2, P(Z = z_3) = 0.4 \text{ om } \theta = \theta_1$$

$$P(Z = z_1) = 0.6, P(Z = z_2) = 0.3, P(Z = z_3) = 0.1 \text{ om } \theta = \theta_2$$

$$P(Z = z_1) = 0.2, P(Z = z_2) = 0.1, P(Z = z_3) = 0.7 \text{ om } \theta = \theta_3$$

Betrakta partitionen $A = \{z_3\}$ och $B = \{z_1, z_2\}$.

Bestäm de betingade fördelningarna $P(Z = z_i|A)$ och $P(Z = z_i|B)$.

Konstruera en stickprovsvariabel som definierar partitionen A, B . Är denna uttömmande?

Är stickprovsvariabeln

$$T(Z) = \begin{cases} 0 & \text{om } Z = z_1 \\ 1 & \text{om } Z = z_2 \text{ eller } z_3 \end{cases}$$

uttömmande?

3) Betrakta n oberoende data från en likformig fördelning $U(0, \theta)$. Skriv upp tätheten för n data x_1, x_2, \dots, x_n samt försök därur hitta en enkel uttömmande stickprovsvariabel.

4) X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende likafördelade med $E(X_i) = \theta$. Vidare är $T = \sum_1^n X_i$ är en uttömmande stickprovsvariabel. Konstruera med hjälp av "Rao-Blackwellization" en skattning av θ om man utgår från (den något urartade skattningen) $U = X_1$.

5) Visa resultatet på sidan 9 att relationen \sim verkligen utgör en ekvivalensrelation, dvs att om $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ betyder att

$$\mathbf{y} \in D(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in R^n : f(\mathbf{y}; \theta) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x})f(\mathbf{x}; \theta)\}.$$