

Problem 5B1509

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Vt 2005

1 Problem 4

1.1 Markov Chain Monte Carlo

Vi är intresserade av den så kallade "hard-core"-modellen där man studerar $I \times J$ -matriser av 0:or och 1:or, där dock två 1:or ej får stå bredvid varandra i höjd eller sidled.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är en "tillåten" matris och

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är "otillåten". Vi vill välja en "tillåten" matris på måfå med lika sannolikhet för alla "tillåtna" matriser av en viss storlek.

1) Vi är här speciellt intresserade av antalet 1:or i en sådan på måfå vald matris. Detta antal är naturligtvis en stokastisk variabel. Bestäm den exakta fördelningen för antalet 1:or för 2×3 -matriser genom ren uppräknings av alla tänkbara fall.

2) Vi studerar nu 10×10 -matriser och låter

U =antalet 1:or i raden med flest 1:or samt

V =antalet 1:or i raden med minst antal 1:or samt

$X = U - V$, dvs skillnaden mellan raden med flest och med minst antal 1:or.

Vilka värden är möjliga för denna stokastiska variabel X ? Bestäm (approximativt) sannolikhetsfördelningen för X genom MCMC-simulering. Beräkna också (approximativt) medelvärde och varians i denna fördelning.

Tips: Lagg en "ram" av 0:or kring ditt 10×10 -matris så slipper Du ta hänsyn till randeffekter. Du kan använda förslagsfördelningen enligt det utdelade materialet, men skall naturligtvis inte ändra 0:orna i "ramen". Notera att procedurerna `max` och `sum` i Matlab funkar kolonn-vis om de har matrisvärda argument.

3) Vi vill med MCMC simulera $N(0, 1)$ -fördelningen. Vi tar som förslagsfördelning (då aktuellt tillstånd är x) den likformiga fördelningen $R(x - 1, x + 1)$.

a) Ange acceptanssannolikheten $\alpha(x, y)$.

b) Försök skriva ett Matlab-program som ger en följd slumpstal enligt ovanstående simulering.

c) Vi föreslog ovan nya slumpstal som en "störning" inom ± 1 . Vad händer om vi tar likformiga störningar inom $\pm a$ och väljer a "för litet" (t ex 0.1) respektive "för stort" (t ex 10)?