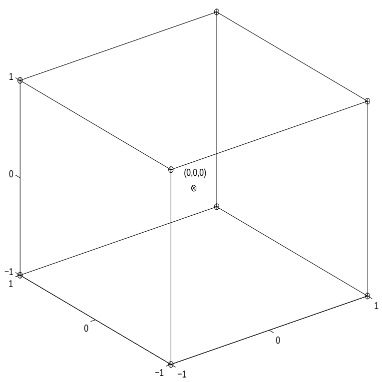
Slumpvandring i rummet

Jan Enger
Matematisk statistik
KTH
Ht 2001

Vi antar en partikel utför en slumpvandring i på heltalspunkterna i tredimensionella rummet. Om partikeln befinner i en punkt förflyttar den sig vid nästa tidpunkt med lika sannolikhet till en av åtta hörnpunkterna i den enhetskub som omger punkten, dvs om den befinner sig i $(0, 0, 0)$ hoppar den till någon av punkterna

$$(-1, -1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)$$

med lika sannolikheter, se figuren. Man kan då visa att slumpvandringarna i x-, y- och z-led är oberoende och att dessa slumpvandringar med lika sannolikhet går åt vänster (nedåt) eller höger (uppåt). Om sålunda punktens koordinat efter n steg är (X_n, Y_n, Z_n) är X_n, Y_n och Z_n är oberoende (visa detta som övning).



Antag att partikeln startar i origo punkten $(0, 0, 0)$. Att partikeln då har återvänt origo efter $2n$ steg är ekvivalent med att antalet högersteg (uppåtsteg) i x-, y- och z-led alla är n. Efter udda antal hopp kan man inte vara tillbaka. Sannolikheten att efter $2n$ hopp ha gjort n högerhopp i x-led är $\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}$ (binomialfördelningssannolikhet!) och detsamma gäller i y- och z-led. Det betyder att sannolikheten att vara tillbaka i origo efter $2n$ hopp är $(\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n})^3$. Sätt nu

$$A_n = \text{ partikeln tillbaka efter } 2n \text{ steg, } n = 1, 2, \ldots$$

Det gäller alltså att

$$P(A_n) = \Big(\binom{2n}{n}(\frac{1}{2})^{2n}\Big)^3. \tag{1}$$

och händelsen att partikeln överhuvudtaget kommer tillbaka till origo är $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Vi skall visa att denna sannolikhet är mindre än 1 och behöver

Sats (Booles olikhet). För godtyckliga händelser $A_1, A_2, \ldots$ gäller att sannolikheten att någon av dem inträffar är högst lika stor som summan av sannolikheterna för händelserna,

$$P(\cup_n A_n) \le \sum_n P(A_n)$$

Bevis Lämnas till läsaren, betrakta Venn-diagram och tolka sannolikhet som areor.

Vi behöver också uppskatta $\binom{2n}{n}$ och för detta ändamål använder vi *Stirlings formel*,

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta_n/(12n)}$$

där θ_n är ett värde som beror på n och där $0 < \theta_n < 1$. Med hjälp av denna får vi

$$\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\theta_n/(6n)} \tag{2}$$

för något $-1 < \theta_n < 1$.

Av detta erhålls från satsen, ekvationerna (1) och (2) att

$$P(A) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n} \right)^3 =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\theta_n/(6n)})^3 < C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

där C är en konstant. Summan ovan konvergerar tydligen och med hjälp av numerik är det inte så svårt att beräkna summan $\sum_{n=1}^{\infty} (\binom{2n}{n} (\frac{1}{2})^{2n})^3$. Med tre decimalers noggrannhet blir den $u = 0.393$. Vi har således visat att sannolikheten att återvända till origo är mindre än 1. Man kan visa, men detta är svårare, att den exakta sannolikhet att återvända till origo blir $\frac{u}{1+u} = 0.282$.

Om man istället betraktar en slumpvandring som sker till närmaste heltalspunkt, dvs från origo till någon av de sex punkterna $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$, eller $(0, 0, \pm 1)$ kommer sannolikheten att återvända att vara c:a 0.35. Denna slumpvandring är något svårare att analysera eftersom vandringarna koordinatvis inte kommer att vara oberoende.

För symmetriska slumpvandringar på linjen och i planet gäller att sannolikheten att återvända till startpunkten är 1. I dessa fall är konvergerar inte summan av sannolikheterna $P(A_n)$.