Existens av stationär fördelning

Gunnar Englund
Matematisk statistik
KTH

Ht 2007

Vi vill här visa att en Markovkedja med ändligt tillståndsrum E alltid har minst en stationär fördelning.

Låt $\boldsymbol{p}$ var en godtycklig men fix sannolikhetsvektor på E. Låt

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}P + \boldsymbol{p}P^2 + \cdots + \boldsymbol{p}P^{n-1})$$

Vi noterar att

$$\boldsymbol{\pi}^{(n+1)} = \frac{n}{n+1}\boldsymbol{\pi}^{(n)} + \frac{1}{n+1}\boldsymbol{p}P^n$$

$$\boldsymbol{\pi}^{(n+1)} = \frac{n}{n+1}\boldsymbol{\pi}^{(n)}P + \frac{1}{n+1}\boldsymbol{p}$$

Vi har att $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ är sannolikhetsvektorer vars komponenter alltså ligger mellan 0 och 1. Enligt Bolzano-Weierstrass sats kan man välja ut en delsvit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sådan att $\boldsymbol{\pi}^{(n_j)} \to \boldsymbol{\pi}$ (komponentvis konvergens) då $j \to \infty$. Man inser att $\boldsymbol{\pi}$ är en sannolikhetsfördelning på E. Vidare gäller att $\boldsymbol{p}P^n$ har komponenter mellan 0 och 1 och att eftersom $n/(n+1) \to 1$ att

$$\boldsymbol{\pi}^{(n_j+1)} \to \boldsymbol{\pi}$$

då $j \to \infty$ ur den första relationen. Vi ser också ur den andra relationen genom att låta $n \to \infty$ genom delsviten $n_1, n_2, n_3, \ldots$ att $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$, dvs att gränsvektorn $\boldsymbol{\pi}$ är en stationär sannolikhetsfördelning.

Bolzano-Weierstrass sats: För en sekvens $x_1, x_2, \ldots$ av tal i ett slutet begränsat intervall $[a, b]$ finns en delsekvens som konvergerar mot en punkt i $[a, b]$.

Ett enkelt bevis finns på

`http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=2129`

men här är ett till. Halvera intervallet - någon av halvorna måste innehålla oändligt många medlemmar i sekvensen och välj ett från denna. Halvera nu denna halva och vi ser att någon av dessa måste innehålla oändligt många medlemmar i sekvensen varav vi väljer en medlem och fortsätt detta.