KTH **Övningsuppgifter för sf1627, matematik för ekonomer**
matematik Harald Lang

1. Förenkla följande uttryck så långt det går:

1. $\dfrac{13}{\sqrt{13}}$ **2.** $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ **3.** $\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ **4.** $\left(3^2+4^2\right)^{1/2}$ **5.** $\dfrac{\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

6. $e^{\ln 2}\cdot \ln e^3$ **7.** $\dfrac{2^{3x}}{4^x 2^x}$ **8.** $\ln 18-\ln 2-2\ln 3$ **9.** $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}$ **10.** $x^{\ln x}-e^{(\ln x)^2}$

Svar: **1.** $\sqrt{13}$ **2.** 5 **3.** 1 **4.** 5 **5.** 1 **6.** 6 **7.** 1 **8.** 0 **9.** 4 **10.** 0

2. Derivator

Produktregeln: derivera

1. $\dfrac{1}{x^2}e^x$ 2. $\sqrt{x}\ln(x)$ 3. $x^2e^x\ln(x)$ 4. $x^3\ln(x)$ 5. $x^3(\ln x)^2$ 6. $(x-1)e^x$

Kvotregeln: derivera

1. $\dfrac{\ln x}{x}$ 2. $\dfrac{x}{\ln x}$ 3. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 4. $\dfrac{xe^x}{1+x^2}$ 5. $\dfrac{1+x^2}{xe^x}$

Kedjeregeln: derivera

1. $e^{\sqrt{x}}$ 2. $e^{-1/x}$ 3. $x\ln(1+x^2)$ 4. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

5. $\ln\left(2+e^{3x^2}\right)$ 6. $\dfrac{K}{x}\left(1-\dfrac{1}{(1+x)^n}\right)$

”Logaritmisk derivering”:

1. Bestäm uttrycket för durationen för en n-årig annuitet.

derivera: 2. $x^{\sqrt{x}}$ 3. $x^{1/x}$ 4. $x^{\left(e^x\right)}$

Andra ordningens derivator: bestäm andraderivatan till

1. e^{-3x} 2. $2e^{x^3}$ 3. $e^{1/x}$

Bestäm den kvadratiska approximationen till funktionen i närheten av den givna punkten:

4. $(1+x)^5,\quad x=0$ 5. $\ln(1+x),\quad x=0$ 6. $\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n,\quad r=0$

7. $\sqrt[3]{1+x},\quad x=0$ 8. $2+3x-4x^2$ 9. $e^{-x^2/2},\quad x=0$

Växande, avtagande: Avgör i vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande:

1. $x^2 - 4x + 3$ 2. $-x^3 + 4x^2 - x - 6$ 3. $x^3 + e^{2x}$

4. $5x^2 e^{-4x}$ 5. $x^2 e^{-x^2}$ 6. $e^x - e^{3x}$

Konvexitet, konkavitet: Avgör om funktionen är konvex eller konkav:

1. e^x 2. e^{-x} 3. $\ln(1+x)$ 4. $\sqrt{x}$

5. I vilka intervall är funktionen $\ln(1+x^2)$ konvex respektive konkav?

Svar:

Produktregeln: 1. $\left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)e^x$ 2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 3. $2xe^x \ln x + x^2 e^x \ln x + xe^x$

4. $3x^2 \ln x + x^2$ 5. $3x^2(\ln x)^2 + 2x^2 \ln x$ 6. xe^x

Kvotregeln: 1. $\frac{1-\ln x}{x^2}$ 2. $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ 3. $\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$ 4. $\frac{e^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1+x^2)^2}$

5. $\frac{x^2 - x^3 - x - 1}{x^2 e^x}$ **Kedjeregeln:** 1. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ 2. $\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ 3. $\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$

4. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 5. $\frac{6xe^{3x^2}}{2+e^{3x^2}}$ 6. $-\frac{K}{x^2}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right) + \frac{K}{x}\frac{n}{(1+x)^{n+1}}$

”Logaritmisk derivering”: 1. $\frac{1}{r} - \frac{n}{(1+r)((1+r)^n - 1)}$ 2. $\frac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

3. $x^{1/x-2}(1-\ln x)$ 4. $x^{\left(e^x\right)}e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ **Andra ordningens derivator:** 1. $9e^{-3x}$

2. $e^{x^3}(18x^4 + 12x)$ 3. $e^{1/x}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$ 4. $1 + 5x + 10x^2$ 5. $x - \frac{1}{2}x^2$

6. $1 + r + \frac{n-1}{2n}r^2$ 7. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ 8. $2 + 3x - 4x^2$ 9. $1 - \frac{1}{2}x^2$

Växande, avtagande: Se läroboken problem 6.3:1, 6.3:2, 6.10:4a, b, c, 6.10:5b.

Konvexitet, konkavitet: 1. konvex 2. konvex 3. konkav 4. konkav

5. konvex för $-1 < x < 1$, konkav för $x < -1$ och $x > 1$.

3. Blandade övningar

1. Beräkna integralen $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$

2. Efterfrågan på en vara ges av $q^d = 4 - p$ och utbudet $q^s = 4p - 8.5$

a) Bestäm pris och kvantitet vid jämvikt (utbud=efterfrågan).

b) Beräkna välfärdsöverskottet vid jämvikt.

c) Antag att prodecenten har monopol, och sätter priset till $p = 3$. vad blir "Dead Weight Loss"? (Dvs. hur mycket minskar välfärden jämfört med jämviktsläget.)

3. **Svårare fråga för "hackers"!** I fråga 2, vilket pris väljer en vinstmaximerande monopolist?

4. Funktionen $y = y(x)$ är definierad vis sambandet $y + e^y = x^3 + x + 1$, och $y(0) = 0$. Bestäm den kvadratiska approximationen till $y(x)$ då $x \approx 0$ (dvs. bestäm det polynom av andra graden som approximerar $y(x)$ då $x \approx 0$.)

5. a) Bestäm det intervall där $y = x^2 e^{-x}$ är konkav.

b) Bestäm funktionens största värde i detta intervall.

Svar 1. $\frac{1}{3}$ **2a.** $p = 2.5,\ q = 1.5$ **b)** $W = 45/32$ **c)** $5/32$ **3.** $3\frac{1}{6}$ **4.** $y(x) \approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2$

5a. Konkav i intervallet. $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$

b) Största värdet är $4e^{-2}$ som antas för $x = 2$.

4. Fler övningar

1. Derivera funktionen $x^{(e^x)}$ **2.** Derivera funktionen $(x^e)^x$

3. Beräkna summan $\sum_{k=1}^{50} 1.01^k$ **4.** Beräkna summan $\sum_{k=1}^{50} 1.01^{-k}$

5. Man sätter kontinuerligt in $100+5t$ kronor per tidsenhet vid tiden t år, $0 \le t \le 10$. Räntan $r = 4\%$ per år adderas kontinuerligt till saldot. Bestäm saldot efter tio år. *Ledning:* Bestäm först nuvärdet av saldot om tio år.

6. En konsument har nyttofunktionen $u(x, y)$ för konsumtionen av kvantiteterna x och y av två varor, vars priser är p respektive q. Han vill uppnå nyttan u_0 till en så låg kostnad som möjligt, och kommer då att konsumera kvantiteterna $x(p,q,u_0)$ respektive $y(p,q,u_0)$.

a) Ställ upp FOC och låt $e(p,q,u_0)$ vara den kostnadsfunktion ("expenditure function") som minimerar kostnaden.

b) Utnyttja FOC och det faktum att $u(x,y) \equiv u_0$ för att visa att $px'_p(p,q,u_0) + qy'_p(p,q,u_0) = 0$ och på samma sätt $px'_q(p,q,u_0) + qy'_q(p,q,u_0) = 0$.

c) Visa att $e'_p(p,q,u_0) = x(p,q,u_0)$ och på samma sätt $e'_q(p,q,u_0) = y(p,q,u_0)$.

d) Visa nu "Slutsky-symmetrierna" $x'_q(p,q,u_0) = y'_p(p,q,u_0)$

Svar:

1. $x^{(e^x)}\left(e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}\right)$ **2.** $x^{ex}(e \ln x + e)$ **3.** 65.1078 **4.** 39.1961 **5.** 1'516.51

5. Ännu fler övningar

Förenkla följande uttryck:

1. $\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{4.5}$ **2.** $\frac{\sqrt{18}\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ **3.** $\log_3 27$ **4.** $\frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)}$ **5.** $\frac{\ln x}{\log_{10}(x)}$.

Lös följande problem:

6. En statsobligation ger 2'000 kronor i kupongutdelning efter ett halvår, efter ett år och efter ett och ett halvt år. Den inlöses sedan till 102'000 kronor efter två år. Räntan r är två procent per halvår. **a)** Beräkna nuvärdet av denna obligation. **b)** Beräkna durationen av denna obligation (durationen är $-\frac{PV'(r)}{PV}$ för det aktuella värdet på r) uttryckt i *år!*

7. Ett kassaflöde ger $a(1+d)^k$ efter k år, k = 5, 6,..., 50. Räntan är r per år. Bestäm nuvärdet av detta kassaflöde. Vi kan anta att $r > d$.

8. Funktionen $z = z(x, y)$ ges av $xz^3 + 2xy^2 + x^2z = 4$, och $z(1,1) = 1$. Bestäm ett närmevärdet till $z(1.05, 0.96)$.

---

svar: 1. 0 **2.** 2 **3.** 3 **4.** $\ln x$ **5.** $\ln(10)$ **6.** 1.904 år

7. $a\frac{1+d}{r-d}\left(\left(\frac{1+d}{1+r}\right)^4-\left(\frac{1+d}{1+r}\right)^{50}\right)$ **8.** $0.9775 \approx 0.98$

6. Lagranges Multiplikatormetod

1. Bestäm största och minsta värdet av $x + 2y$ under bivillkoret
$x^2 + y^2 = 1$

2. Ett företag har produktionsfunktionen $F(K, L)$, där K och L är ”insatsvarorna” kapital och arbetskraft. Priserna på ”insatsvarorna” är r respektive w. Företaget minimerar sin kostnad för en given produktion $Q = F(K, L)$. Visa att marginella substitutionskvoten
$$\frac{F'_K}{F'_L} = \frac{r}{w}$$

3. En konsument har nyttofumktionen $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ då han konsumerar kvantiteterna x respektive y av två varor. Priserna på de två varorna är p respektive q, och totalt spenderar han beloppet m på de två varorna.
Bestäm de optimala kvantiteterna $x*$ och $y*$. Bestäm också marginalnyttan av inkomst, uttryckt i p, q, och m. Hur påverkas marginalnyttan av inkomst om bägger priserna och m fördubblas?

4. Bestäm största värdet av x^2y^2 under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = 1$. Vad är minsta värdet? kan du se det utan att göra några kalkyler?

5. En konsument har nyttofunktionen $u(x, y) + z$ vid konsumtionerna x, y, z av tre varor. Han maximerar sin nytta och spenderar totalt beloppet m på de tre varorna, vars priser är p, q, r, respektive. Visa att de optimala värdena på x och y inte beror på m. Visa att marginalnyttan av inkomst inte heller beror på m.

6. Under förutsättningarna i problem 5: visa Slutsky-symmetrierna för de inversa efterfrågefunktionerna för x och y: $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$

SVAR på några av problemen

1. Största värdet är $\sqrt{5}$ och antas för $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, minsta värdet är $-\sqrt{5}$ och antas för $x = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$.

3. $x* = \dfrac{mq}{pq + p^2}$, $y* = \dfrac{mp}{pq + q^2}$ marginalnyttan $= \dfrac{\sqrt{\mathrm{p} + \mathrm{q}}}{2\sqrt{\mathrm{mpq}}}$

4. $\dfrac{1}{8}$. Minsta värdet är uppenbarligen (?) 0.

Repetitionsuppgifter

1a. Beräkna summan $\sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$. *Ledning:* ansätt $ka^{k-1} = b_k - b_{k-1}$ där $b_k = (xk+y)a^k$ och bestäm x och y.

1b. Om $0 < a < 1$, vad blir då $\sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1}$?

2. Beräkna $\int_0^n xe^{-ax}dx$. *Ledning:* ansätt $xe^{-ax} = \frac{d}{dx}(bx+c)e^{-ax}$, och bestäm konstanterna b och c. Observera likheten med uppgift 1!

3. Vi lånar K kronor idag och amorterar med $a(1+\delta)^{k-1}$ kronor om k år, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Om räntan är r per år, hur lång tid tar det innan lånet är amorterat? Antag först att $d \neq r$, och behandla sedan fallet $d = r$ separat. *Ledning:* Lånet är återbetalat då nuvärdet av amorteringarna är lika med lånets storlek.

4. Samma fråga som i 3, men vi har kontinuerlig förräntning r och betalar kontinuerlig amortering $a(t) = ae^{\delta \cdot t}$ per tidsenhet.

5. Efterfrågan för kaffe är $Q(p) = Q_o e^{-0.005p}$ [påhittat av mig] där p är priset per kilo. Totala kostnaden för kaffet då priset är $p = 50$ kr/kilo är alltså $K = 50 \cdot Q_o e^{-0.25}$ kronor. Antag att priset p sänks från 50 till 45 kronor per kilo. Bestäm ökningen av konsumentöverskottet, som andel av K. Var resultatet ungefär det du förväntat dig?

6. Bestäm priselasticiteten för efterfrågan på kaffe (se uppgift 5) vid priset $p = 50$ kronor /kilo. Beräkna med den approximativa formeln med elasticitet den procentuella ökningen i efterfrågan då priset minskar från 50 till 45 kronor per kilo, och jämför med det exakta värdet.

7. Derivera funktionen x^{2x}.

8. Vi har en cylindrisk tank med vatten i. I botten finns en tapp, och när den dras ur rinner vattnet ut med hastigheten $\sqrt{x}$ liter per sekund, där x är vattennivåns höjd i cylindern. Om vattennivåns höjd från början är h, beräkna den tid det tar för allt vatten att rinna ut. Vi antar att cylinderns innerdiameter är 1.

9. Funktionen $y = y(x)$ definieras genom sambandet $x^3 + x^2y + y^3 + y = 2$. Verifiera att $y(0) = 1$. Bestäm en approximation av $y(x)$ i närheten av $x = 0$ som ett polynom av andra graden.

Svar: 1a. $\frac{1-a^n(n+1-an)}{(1-a)^2}$ 1b. $\frac{1}{(1-a)^2}$ 2. $\frac{1-e^{-an}(1+an)}{a^2}$

3. $\frac{\ln(a+K(\delta-r))-\ln a}{\ln(1+\delta)-\ln(1+r)}$ 4. $\frac{\ln(a+K(\delta-r))-\ln a}{\delta-r}$ 5. 10.126% ; Ja!

6. $El=-0.25$, enligt approximativa formeln skulle ökningen i efterfrågan vara 2.5%, exakta värdet är $\approx 2.53\%$.

7. $2x^{2x}(1+\ln x)$ 8. $\frac{\pi}{2}\sqrt{h}$ 9. $y(x)\approx 1-\frac{1}{4}x^2$

KTH Teknikvetenskap

Tentamensskrivning för sf1627, matematik för ekonomer, 22/10/2010
kl 8.00-13.00.
Hjälpmedel: miniräknare
Examinator: Harald Lang

1. Derivera följande funktioner:
   $e^{\sqrt{x}}$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad 2^x$, $\quad x\ln\left(1+e^x\right)$, $\quad \dfrac{\ln x}{1+x}$ där $x>0$

2. Bestäm största värdet till funktionen $f(x,y)=20y+2xy-2x^2-3y^2$, och ange för vilka värden på x och y det antas.

3. Funktionen $z=z(x,y)$ bestäms genom sambandet
   $$x^3+y^2z+z^3+x^2y=42$$
   där $z(1,2)=3$. Bestäm de partiella derivatorna $z'_x(1,2)$ och $z'_y(1,2)$.

4. Inversa efterfrågan på en vara är $p=10-0.5q+0.005q^2$, där p = pris och q = efterfrågad kvantitet, uttrycket gäller för 0< q < 27. Bestäm totala konsumentöverskottet om priset p = 5.105.

5. Bestäm största värdet av funktionen $x+2y+3z$, där $x>0, y>0$ och $z>0$ under bivillkoret $x^2+y^2+z^2=14$

6. Ett lån på 100’000 kronor återbetalas med en **kontinuerlig** amortering $10'000e^{0.04t}$ kronor (t = tid i år) per år. Räntan debiteras skulden **kontinuerligt** med 3% per år. Bestäm tiden T då lånet är återbetalat.

7. Ett företag har produktionsfunktionen $Q(K,L)=\sqrt{KL}$, där K är kapital och L arbetskraft. Priserna för dessa “insatsvaror” är r respektive w, så kostnaden är $rK+wL$. Företaget minimerar kostnaden för en given produktionsvolym Q. Bestäm företagets marginalkostnad (uttryckt i r,w och Q).

Svaren till tentamen i sf1627 22/10/2010

1. $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$, $\frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$, $2^x\ln(2)$, $\ln(1+e^x)+\frac{xe^x}{1+e^x}$, $\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$

2. Maximum antas för $x=2, y=4$. $f_{\max}=40$

3. $z'_x(1,2)=-7/31$, $z'_y(1,2)=-13/31$

4. $\frac{1936}{75}\approx 25.8$

5. Största värdet är 14. Det antas för $x=1, y=2, z=3$.

6. $100\ln(1.1)$ år ≈ 9.53 år

7. Marginalkostnaden är $2\sqrt{rw}$ vid alla produktionsvolymer.

KTH Teknikvetenskap

Tentamensskrivning i Matematik för Ekonomer (sf1627),
måndagen 10/1/2011 kl 14:00–19:00.
Hjälpmedel: miniräknare
Examinator: Harald Lang

1. Derivera dessa funktioner: $e^{(x^2)}$, $(e^x)^2$, $\sqrt{1+e^{2x}}$, $\dfrac{x}{1+x^2}$.

2. Funktionen $y = y(x)$ definieras genom sambandet $x^3 + x^2 y + y^3 = 11$, $y(1) = 2$.
   a) Bestäm $y'(1)$. b) Bestäm $y''(1)$.

3. Du har ett lån på K kronor, och du amorterar $c \cdot a^k$ efter $k = 1$ år, $k = 2$ år, osv, till och med efter $k = n$ år. Räntan på lånet är r per år. (Vi kan anta att $a > 1 + r$.) Bestäm storleken på skulden efter n år (direkt efter den sista amorteringen). Svaret skall vara ett uttryck i K, c, a, r och n. (Svaret skall *inte* skrivas som en summa från $k = 1$ till $k = n$.)

4. Definiera $f(c)$ genom $f(c) = \max\ x + y$ under bivillkoret $3x^2 + 4y^2 = c$. Bestäm derivatan $f'(c)$. (I maximum är både x och y positiva.)

5. Givet funktionen $y = \ln(1+x)$.
   a) Bestäm andragrads-approximationen till $y(x)$ i närheten av $x = 0$, dvs
   $\tilde{y}(x) = a + bx + cx^2$, där du skall bestämma a, b och c så att $\tilde{y}(x) \approx y(x)$ för $x \approx 0$.
   b) Beräkna $y(1.1)$ och $\tilde{y}(1.1)$ med tre decimaler.

6. Funktionen $z = z(x, y)$ definieras genom sambandet $x + 2yz + y^3 + z^3 = 1$, för värden på x och y nära noll. Bestäm den linjära approximationen till $z(x, y)$ i närheten av $x = 0$, $y = 0$. Du skall alltså bestämma a, b och c i funktionen $\tilde{z}(x, y) = a + bx + cy$ så att $z(x, y) \approx \tilde{z}(x, y)$ då $x \approx 0, y \approx 0$.

Svar

1. $2xe^{(x^2)}$ $\quad 2(e^x)^2 = 2e^{2x}$ $\quad \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ $\quad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

2. $y'(1) = -\dfrac{7}{13}$ $\quad y''(1) = -\dfrac{1914}{2197} \approx -0.8712$

3. $K(1+r)^n - c\dfrac{a^{n+1} + a(1+r)^n}{a-r-1}$

4. $f'(c) = \sqrt{\dfrac{7}{48c}}$

5. $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{1}{2}x^2$, $y(1.1) = 0.712$, $\tilde{y}(1.1) = 0.495$

   (Jag gjorde en tabbe här; det var meningen att det skulle vara 0.1, inte 1.1. Nåja!)

6. $z(x,y) \approx 1 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y$

KTH Matematik

Tentamensskrivning i matematik för ekonomer, sf1627, 23/8/2011, kl. 14:00–19:00. *Hjälpmedel:* miniräknare. *Examinator:* Harald Lang.

1. Lös ut $x =$ uttryck i a i följande fall:

   i) $5e^{-3x} = a$, ii) $\ln\left(\sqrt{1+x}\right) = a$, iii) $2^x 3^x = a$, iv) $\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \ln(\sqrt{1+x^2}) = a$.

2. Derivera följande uttryck m.a.p. x

   i) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, ii) $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^x}\right)$, iii) 1.005^{12x}, iv) x^{12x}.

3. En varas efterfrågefunktion är $Q^D = ae^{-bp}$ där Q^D är såld kvantitet och p är priset. Bestäm efterfrågans priselasticitet uttryckt i a, b och p och förenkla uttrycket så långt det går.

4. Antag att du har en skuld på 1 miljon kronor och att räntan du betala på lånet är fixerat till 4% per år att betalas i slutet på varje år. Du betalar 60’000 kronor per år i räntebetalning och amortering varje år med början om ett år (du är nu i slutet av år noll, och första inbetalningen är i slutet av år ett). Beräkna skuldens värde om 20 år, omedelbart efter 20:e inbetalningen.

5. Funktionen $y(x)$ definieras genom sambandet $2y^3 + 6xy + x^2 = 18$ där $y(2) = 1$. Bestäm andra ordningens approximation till $y(x)$ i närheten av $x = 2$: $y(2+t) \approx 1 + at + bt^2$ för $t \approx 0$. (Du skall alltså bestämma konstanterna a och b.)

6. En vara har efterfrågefunktionen $Q^D = 10'000e^{-0.0035p}$ där Q^D är antalet sålda enheter och p är priset. Producenten väljer att sätta priset till 200 kronor per enhet. Bestäm konsumentöverskottet som detta genererar.

7. **Bestäm värdet** på $f(225)$ där $f(c) = \max_{x,y}(3x+4y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = c$ (c är alltså = 225.) **Bestäm också** derivatan $f'(225)$.

Svar:

1. i) $x=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{a}\right)$ ii) $x=e^{2a}-1$ iii) $x=\frac{\ln a}{\ln 6}$ iv) $x=e^{a}$

2. i) $-\frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)}(1+x^2)^{3/2}}$ ii) $-\frac{e^x}{1+e^x}$ iii) $12\cdot 1.005^{12x}\cdot\ln(1.005)$ iv) $12(1+\ln x)x^{12x}$

3. $-bp$

4. 404’438 kronor

5. $y(2+t)\approx 1-\frac{5}{9}t+\frac{13}{486}t^2$

6. $\frac{20'000'000}{7}e^{-0.7}$ kronor $\approx 1'419'000$ kronor

7. $f(225)=75$, $f'(225)=\frac{1}{6}$