

SF1901: Medelfel, felfortplantning

Jan Grandell & Timo Koski

15.09.2011



Felfortplantning kallas 'propagation of error' på engelska. Felfortplantning handlar om hur mätfel fortplantas till funktioner av mätvärden. Felfortplantningen är av särskild betydelse i samband med behandlingen av toleransfrågor för funktioner av mätvärden. Vi kommer att mest diskutera Gauss' approximationsformler för fortplantning av medelfel.

Medelfel för en skattning

Vi använder variansen $V(\theta^*)$ eller, vilket i princip är samma sak, standardavvikelsen $D(\theta^*)$ som precisionsmått för en skattning θ^* . Ju mindre varians (större effektivitet), desto belåtnare är vi med skattningen. Ibland hamnar man då i en besvärlig situation: Variansen och standardavvikelsen är själva okända, emedan de beror av just den parameter som man vill skatta (och kanske av ytterligare andra okända parametrar).

Medelfel för en skattning

Om man vill få information om $D(\theta^*)$ får man försöka hitta på en skattning även av denna storhet (parameter). Konsekvensen blir att man inte får ett exakt precisionsmått utan bara ett ungefärligt. Vi skulle kunna beteckna denna numeriska skattning av osäkerheten med $D(\theta^*)_{\text{obs}}^*$ men skriver den i stället $d(\theta^*)$.

Definition

En skattning av $D(\theta^)$ kallas medelfelet för θ^* och betecknas $d(\theta^*)$.*

Hur medelfelet skall väljas får avgöras från fall till fall. Man borde tillse att $d(\theta^*)$ är en konsistent skattning av $D(\theta^*)$.

Detta kan nog verka förbryllande men man skall hålla isär begreppen: θ_{obs}^* är en skattning av θ och $d(\theta^*)$ är en skattning av $D(\theta^*)$.



Fortplantning av medelfel

Felfortplantning, eller Gauss-approximation, används ibland för att approximativt beräkna medelfel för skattningar. Antag att vi har en skattning θ_{obs}^* som vi vet är approximativt väntevärdesriktig samt anser oss veta medelfelet för. Vi bildar nu en funktion $g(\theta_{\text{obs}}^*)$ av skattningen. Detta kan vara aktuellt om vi är intresserade av att skatta en parameter $\psi = g(\theta)$, där en naturlig skattning är $\psi_{\text{obs}}^* = g(\theta_{\text{obs}}^*)$.

Vi undrar nu hur osäkerheten (medelfelet) i θ -skattningen "fortplantas" genom funktionen g till en osäkerhet (medelfel) i ψ -skattningen. Vad vi gör är att serieutveckla (linjärisera) funktionen g genom

$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + \text{restterm}$$

där vi anser oss kunna försumma resttermen. Vad detta innebär är att vi ersätter funktionen $g(x)$ med tangenten i punkten a som (ibland) är en hyfsad approximation åtminstone i närheten av punkten a . Om vi väljer $a = \theta$ erhåller vi

$$\psi^* = g(\theta^*) \approx g(\theta) + (\theta^* - \theta)g'(\theta).$$

Gauss-approximation

Om nu $E(\theta^*) \approx \theta$, d.v.s. att θ_{obs}^* är (åtminstone approximativt) väntevärdesriktig, och dessutom huvuddelen av sannolikhetsmassan i fördelningen för θ^* finns i det område där den linjära approximationen är god erhåller man

$$E(\psi^*) \approx g(\theta) = \psi$$

och

$$V(\psi^*) \approx (g'(\theta))^2 V(\theta^* - \theta) = (g'(\theta))^2 V(\theta^*) \approx (g'(\theta_{\text{obs}}^*))^2 V(\theta^*).$$



Sats

Om θ_{obs}^ är approximativt väntevärdesriktig med medelfelet $d(\theta^*)$ så gäller att $\psi_{obs}^* = g(\theta_{obs}^*)$ är approximativt väntevärdesriktig som skattning av $\psi = g(\theta)$ samt har approximativt medelfel $d(\psi^*) \approx |g'(\theta_{obs}^*)|d(\theta^*)$.*

Exempel: *Felfortplantning*

Låt $x_1, \dots, x_n$ vara utfall av oberoende stokastiska variabler $X_1, \dots, X_n$, respektive, som är *ffg*-fördelade dvs.

$$p_X(x) = p \cdot (1 - p)^{(x-1)} \text{ för } x = 1, 2, \dots$$

- (a) Bestäm minsta-kvadrat-skattningen p_{obs}^* av parametern p , där $0 < p < 1$.
- (b) Bestäm approximativt väntevärde $E(p^*)$ och varians $V(p^*)$ för minsta-kvadrat-skattningen p_{obs}^* .

Exempel: Felfortplantning *Minsta kvadrat*

a) Enligt formelsamlingen är $E(X_i) = \frac{1}{p} = \mu(p)$ och därmed bildar vi minsta-kvadrat-skattningen genom att minimera funktionen

$$Q(p) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(p))^2.$$

och enligt tidigare fås

$$p_{\text{obs}}^* = \mu^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = \mu^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}},$$

där $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. SVAR: $p_{\text{obs}}^* = \frac{1}{\bar{x}}$.

(b) Inför $g(x) = \frac{1}{x}$, för $x > 0$. Sätt $\theta = \frac{1}{p}$ och $\theta^* = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Vi har

$$\begin{aligned} E(\theta^*) &= E(\overline{X}) \\ &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \end{aligned}$$

Men och enligt formelsamlingen är $E(X_i) = \frac{1}{p}$ och således $E(\overline{X}) = \frac{1}{p} = \theta$ dvs.

$$E(\theta^*) = \theta.$$

Då ger Gauss approximation

$$E(p^*) = E(g(\theta^*)) \approx g(E(\theta^*)) = g(\theta) = p.$$

SVAR: $E(p^*) \approx p$.

Med stöd av Gauss' approximationsformler fås nu att

$$V(p^*) = V(g(\theta^*)) \approx V(\theta^*) \cdot \left(g'(E(\theta^*))\right)^2.$$

Men eftersom vi har oberoende stokastiska variabler, så blir $V(\theta^*) = V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n V(X_i)$. Enligt formelsamlingen är $V(X_i) = \frac{1-p}{p^2}$. Detta ger $V(\theta^*) = \frac{1}{n} \frac{1-p}{p^2} (= \frac{1}{n} \theta(\theta-1))$. Eftersom $g'(x) = -1/x^2$, blir $\left(g'(E(\theta^*))\right)^2 = \frac{1}{(E(\theta^*))^4} = \frac{1}{\theta^4} = p^4$.

SVAR: $V(p^*) \approx (1-p^*) \cdot (p^*)^2/n$.

Konfidsensintervall för $g(\theta)$ med approximativ konfidsensgrad $1 - \alpha$ (Gauss approximation används för medelfel)

$$I_{g(\theta)} = (g(\theta_{\text{obs}}^*) - \lambda_{\alpha/2} |g'(\theta_{\text{obs}}^*)| d(\theta^*), g(\theta_{\text{obs}}^*) + \lambda_{\alpha/2} |g'(\theta_{\text{obs}}^*)| d(\theta^*)).$$

Allmänna formeln för fortplantning av varians

$X_1, X_2, \dots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler. Vi har en funktion $U = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ som är så snäll att

$$V(U) \approx \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g_1 \right)^2 V(X_1) + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} g_n \right)^2 V(X_n)$$

där

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x_1=E[X_1], \dots, x_n=E[X_n]}$$

Det är ingen svår sak att konstruera ett matematiskt exempel där formeln ger en rätt så dålig approximation. Men många praktiker anser att formeln fungerar fungerar oftast hyfsat väl i ingenjörstillämpningar.