SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 2. Betingad sannolikhet & Oberoende

Jan Grandell & Timo Koski

14.01.2013

KTH Matematik

Repetition: Kolmogorovs axiomsystem

Ett *sannolikhetsmått* P är en funktion av händelser, sådan att:

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$;

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) om A och B är disjunkta händelser, så gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Repetition: Regler för sannolikhetskalkyl

Sats

$P(A^*) = 1 - P(A).$

Sats

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

En sats till

Sats

Låt A och B vara två händelser och $A \subset B$. Då gäller

$$P(A) \leq P(B).$$

Bevis: $B = A \cup (B \cap A^*)$ (rita ett Venndiagram). Det är klart att

$$A \cap (B \cap A^*) = \emptyset$$

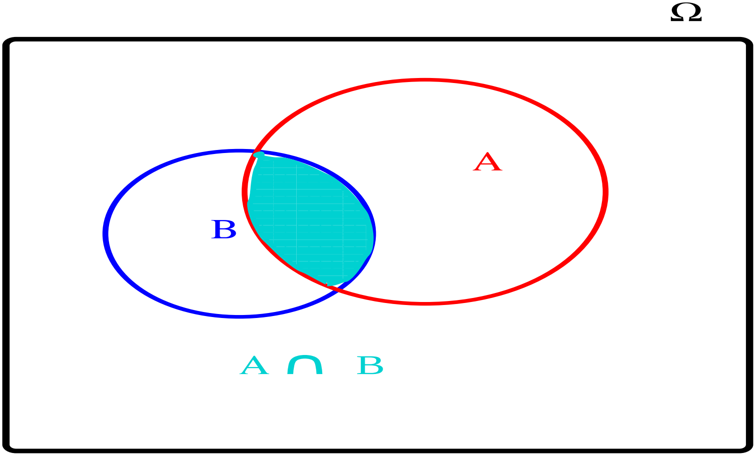
Därför ger axiom (c)

$$P(B) = P(A \cup (B \cap A^*)) = P(A) + P(B \cap A^*) \geq P(A),$$

ty $P(B \cap A^*) \geq 0$.

Inledning (betingad sannoliket)

Låt A och B vara två händelser, dvs $A, B \subset \Omega$. Vad är sannolikheten, betecknad med $P(B \mid A)$, för B då vi vet att A har inträffat?



$P(B \mid A)$

Vi är ledda oss till följande definition.

Definition

Låt A och B vara två händelser. Antag att $P(A) > 0$. Sannolikheten för B betingat av A betecknas med $P(B \mid A)$ och definieras som

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

KTH Matematik

Betingad sannolikhet är ett sannolikhetsmått:

- $P(B \mid A) \geq 0$ är klart. $A \cap B \subseteq A$, och satsen ovan ger $P(A \cap B) \leq P(A)$ d.v.s. $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$.
- $P(A \mid A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ m.a.o. A är utfallsrummet.
- Tag $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = \frac{P(B_1 \cup B_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{P(A)} = \frac{P((B_1 \cap A)) + P((B_2 \cap A)}{P(A)}$$

and by axiom (c)

$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A).$$

KTH Matematik

Betingad sannolikhet: exempel

Exempel

(Kast med röd och vit tärning)
$A =$ *summan av ögonen är högst 4.*
$B_k =$ *vita tärningen visar* k *ögon.*
$P(B_k \mid A) = 0$ *om* $k \geq 4$.
Möjliga utfall, m, är 36: $(v, r), v, r = 1, \ldots 6$, *dvs* $(1, 1), (1, 2), \ldots (6, 6)$.
Gynnsamma utfall för A, är 6*: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1).*
Gynnsamma utfall för $A \cap B_k$, *är* $4 - k$*:* $(v, r), v = k, r = 1, \ldots 4 - k$,
dvs $(k, 1), (k, 2), \ldots (k, 4 - k)$ *om* $k < 4$.

Betingad sannolikhet: exempel forts.

Exempel

Klassiska sannolikhetsdefinitionen ger

$$P(A) = \frac{6}{36} \quad och \quad P(A \cap B_k) = \frac{4-k}{36}.$$

Detta ger, för $k < 4$,

$$P(B_k \mid A) = \frac{4-k}{6} = \begin{cases} \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & k = 2 \\ \frac{1}{6} & k = 3. \end{cases}$$

KTH Matematik

Betingad sannolikhet

Ofta är det lättare att ange värden till betingade sannolikheter än till obetingade, och vi utnyttjar definitionen "baklänges".

Exempel

En ohederlig person har två tärningar, en äkta och en falsk som alltid ger 6 ögon. Han väljer slumpmässigt den ena. Vad är sannolikheten för 5 resp. 6 ögon. Låt oss betrakta fallet med sex ögon. Intuitivt bör gälla att sannolikheten är

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{7}{12}.$$

KTH Matematik

Lagen om total sannolikhet

Mera systematiskt gäller följande sats

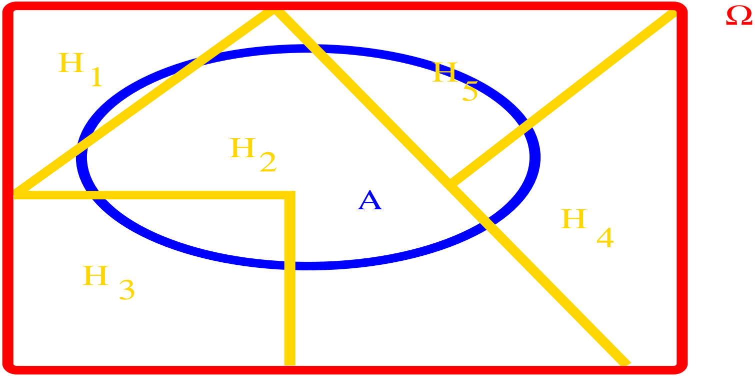
Sats

(Lagen om total sannolikhet)
Om $H_1, \ldots, H_n$ är disjunkta händelser, har positiv sannolikhet och uppfyller hela Ω, så gäller för varje händelse $A \subset \Omega$ att

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$

KTH Matematik

Lagen om total sannolikhet



Lagen om total sannolikhet

Bevis. Vi utnyttjar en av De Morgans regler

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_n)) = P((A \cap H_1) \cup \ldots \cup (A \cap H_n))$$

och sedan Kolmogorovs axiom (c) från första föreläsningen, ty $(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset$ om $i \neq j$,

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

$\square$

KTH Matematik

Vi ska nu ge en viktig sats om "vändning" av händelserna i betingade sannolikheter.

Sats

(Bayes' sats) *Under samma villkor som i lagen om total sannolikhet gäller*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}.$$

Bevis.

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i \cap A)}{P(H_i)} \cdot \frac{P(H_i)}{P(A)} = P(A \mid H_i) \cdot \frac{P(H_i)}{P(A)}.$$

Lagen om total sannolikhet tillämpad på $P(A)$ ger resultatet.

Bayes' sats: tolkning

Sannolikheten $P(H_i)$ kallas **a priori sannolikhet** för H_i. Sannolikheten $P(H_i \mid A)$ kallas **posteriori sannolikhet** för H_i. Bayes' sats visar alltså hur a priori sannolikhet omvandlas till posteriori sannolikhet.

KTH Matematik

Bayes' sats: exempel

Låt oss gå tillbaka till exemplet om falskspelaren. Sätt
$A = 6$ ögon.
$H_1 =$ äkta tärningen.
$H_2 =$ falska tärningen.
Då gäller

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{12},$$

som i exemplet. Bayes' sats ger vidare

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = P(A \mid H_1) \cdot \frac{P(H_1)}{P(A)} = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{12}{7} = \frac{1}{7}$$

och

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = P(A \mid H_2) \cdot \frac{P(H_2)}{P(A)} = 1 \cdot \frac{1}{2}\frac{12}{7} = \frac{6}{7}$$

vilket kanske inte är lika lätt att inse rent intuitivt.

Bayes' sats: screening för cancer

Vi räknar på det exempel som ges av John Allen Paulos: The Math behind Screening Tests. What a positive result really means. *Scientific American* , January 2012. http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=weighing-the-positives

Låt oss anta att 0.4 % av befolkningen drabbas av en form av cancer. Ett diagnostiskt test ger positivt resultat i 99.5 % av fallen, om en individ har cancer och ger positivt resultat i 1 % av fallen, om en individ inte har cancer. Om vi plockar på måfå en vuxen individ ur en stor population och testet ger ett postivt svar, vad är sannolikheten för att individen har den aktuella formen av cancer ? Beteckna $A_1 =$ individen har cancer. $A_2 =$ individen har inte cancer. $B =$ positivt testresultat. Vi har

$P(A_1) = 0.004, P(A_2) = 0.996, P(B|A_1) = 0.995, P(B|A_2) = 0.01$

Sökt är $P(A_1|B)$.

KTH Matematik

Bayes' sats: medicinsk diagnostik

$$P(A_1) = 0.004, P(A_2) = 0.996, P(B|A_1) = 0.995, P(B|A_2) = 0.01$$

Bayes' sats ger $P(A_1|B)$ som

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} =$$

$$= \frac{0.995 \cdot 0.004}{0.995 \cdot 0.004 + 0.01 \cdot 0.996} = 0.2855.$$

En oväntat låg posteriori sannolikhet ! Varför är detta ändå ett rimligt svar ? Vilken slutsats drar vi om screening ?

Oberoende händelser

Intuitivt är två händelser A och B oberoende om inträffandet av A inte ger någon information om huruvida B inträffar eller ej. I formler betyder detta

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Allmänt gäller ju

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{om } P(A) > 0.$$

KTH Matematik

Oberoende händelser

Multiplikation med $P(A)$ leder oss till följande definition:

Definition

Två händelser A och B är oberoende om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definitionen ovan kräver inget villkor om positiva sannolikheter.

KTH Matematik

Oberoende händelser

Det är inte självklart hur oberoende skall definieras för flera händelser.

Definition

Tre händelser A, B och C är oberoende om

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\
P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C).
\end{aligned}
$$

Endast $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ räcker inte, vilket inses om vi sätter $A = B$ och $C = \emptyset$.

Oberoende händelser

Inte heller räcker parvis oberoende, vilket ses av följande exempel:
Kast med röd och vit tärning:
$A =$ vita tärningen visar jämnt antal ögon.
$B =$ röda tärningen visar jämnt antal ögon.
$C =$ jämn ögonsumma.
A och B är oberoende av "försöksskäl". Vidare gäller

$$P(A \cap C) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{och} \quad P(A)P(C) = \frac{1}{4}.$$

Således är A och C oberoende. Pss. följer att B och C är oberoende.
Eftersom $A \cap B \Rightarrow C$ vore det inte rimligt att anse att A, B och C är oberoende.

KTH Matematik

Oberoende händelser

Allmänt: Oavsett vilka händelser vi plockar ut så skall sannolikheten för snittet vara produkten av sannolikheterna.
Man kan visa att om $A_1, \ldots, A_n$ är oberoende, så är även $A_1^*, \ldots, A_n^*$ oberoende. Detta kan verka helt självklart, med är inte helt lätt att visa.
Vi nöjer oss med fallet $n = 2$.

KTH Matematik

Oberoende händelser

Vi har

$$P(A^* \cap B^*) = P((A \cup B)^*) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A))$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^*)P(B^*).$$

KTH Matematik

Sats

Låt händelserna $A_1, \ldots, A_n$ vara oberoende. Sätt $B = \bigcup_1^n A_i$, dvs. minst en av händelserna $A_1, \ldots, A_n$ inträffar. Då gäller

$$P(B) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \ldots (1 - P(A_n)).$$

Bevis.

$$P(B) = 1 - P(B^*) = 1 - P\left(\bigcap_1^n A_i^*\right) = 1 - \prod_1^n P(A_i^*) = 1 - \prod_1^n (1 - P(A_i))$$

$\square$

KTH Matematik