SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 4.
Väntevärde och varians, funktioner av s.v:er, flera stokastiska variabler.

Jan Grandell & Timo Koski

10.09.2008

KTH Matematik

Väntevärden

Vi ska nu införa begreppet väntevärde för en s.v. Detta är den teoretiska motsvarigheten till begreppet medelvärde för en talföljd.
Antag att vi har en lång talföljd $x_1, \ldots, x_n$, där talen är ganska små heltal. Medelvärdet definierades av

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Det kan vara bekvämt att göra omskrivningen

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot f_i,$$

där

$$f_i = \frac{\text{antalet } \{k;\ x_k = i\}}{n}.$$

Väntevärden

När vi diskuterade tolkningen av begreppet sannolikhet, så sa vi att

$$\frac{\text{antalet gånger } A \text{ inträffar}}{n} \to P(A) \text{ då } n \text{ växer.}$$

För diskreta s.v. gäller då att $f_k \to p_X(k)$ då $k \to \infty$. Vi leds av detta till följande definition:

Definition

Väntevärdet μ för en s.v. X är

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) & \textit{i diskreta fallet,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx & \textit{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

KTH Matematik

Väntevärden

Väntevärden Vi skall alltid anta att

$$\sum_{k=0}^{\infty} |k| p_X(k) < \infty \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx < \infty.$$

Väntevärdet ger samma information och samma brist på information för den s.v. som medelvärdet ger för en talföljd.

Väntevärden

Låt oss tänka på tärningskast igen. Hur mycket skulle ni vara villiga att betala för följande spel: Jag kastar en tärning, och ni får lika många kronor som det blir ögon?

Vi har

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{för } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{för övriga värden på } k, \end{cases}$$

vilket ger

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = \sum_{k=1}^{6} k \frac{1}{6} = 3.5.$$

Väntevärde för Poissonfördelningen

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \text{ för } k = 1, 2 \ldots .$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} e^{-\mu}$$

$$= \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} = \mu.$$

KTH Matematik

Väntevärde för exponentialfördelningen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \begin{pmatrix} y = \lambda x \\ x = y/\lambda \\ dx = dy/\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y}\, dy = \frac{1}{\lambda} \left[-y e^{-y} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = 0 - \frac{1}{\lambda} \left[e^{-y} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

KTH Matematik

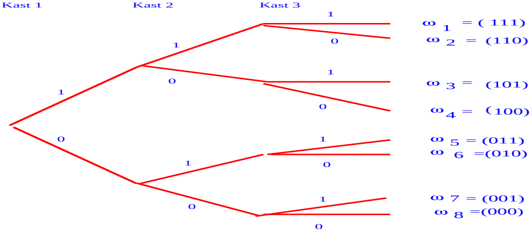
Funktioner av stokastiska variabler

Om X är en stokastisk variabel. Om $g(x)$ är en reelvärd funktion av x, så är

$$Y = g\left(X\right)$$

en stokastisk variabel, eftersom den är en funktion av en stokastisk variabel.

Tre oberoende kast av ett häftstift: funktion av en stokastisk variabel

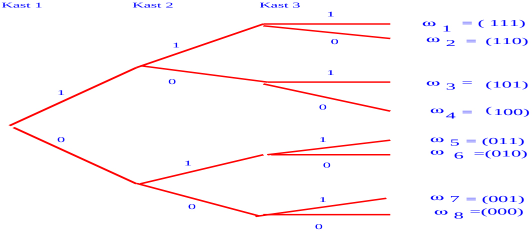


X = 'antalet ettor i tre oberoende kast av ett häftstift'. $g(x) = (x-2)^2$

$$Y = g(X) = (X-2)^2$$

$X(\omega_1) = 3, X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = 2,$
$X(\omega_4) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = 1,\ X(\omega_8) = 0.$

Tre oberoende kast av ett häftstift: sannolikhetsfunktion för $Y = (X-2)^2$



$Y(\omega_1) = 1, Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = Y(\omega_5) = 0,$
$Y(\omega_4) = Y(\omega_6) = Y(\omega_7) = 1,\ Y(\omega_8) = 4.$

$$P(Y=4) = (1-p)^3, P(Y=1) = p^3 + 3p(1-p)^2,$$

$$P(Y=0) = 3p^2(1-p)$$

Väntevärde för $Y = g(X)$

Antag att vi känner förd. för X, och vill beräkna $E(Y)$ där $Y = g(X)$. Följande, skenbart oskyldiga, sats är ordentligt svår att bevisa i det kontinuerliga fallet

Sats

Väntevärdet för $g(X)$ är

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g(k) p_X(k) & \text{i diskreta fallet,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \text{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

KTH Matematik

Väntevärde för $Y = g(X)$

Bevis. Blom m.fl. visar satsen i det diskreta fallet, så vi betraktar det kontinuerliga fallet. Vi begränsar oss dock till fallet då g är strikt växande. Denna begränsning förenklar beviset högst avsevärt.
Låt $g^{-1}(x)$ vara inversen till g. Då gäller

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

vilket ger

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} = F_X'(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}.$$

KTH Matematik

Väntevärde för $Y = g(X)$

Av detta fås

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \, dy$$

$$= \begin{pmatrix} x = g^{-1}(y) \\ dx = \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \, dy \\ y = g(x) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \, dx.$$

$\square$

Väntevärde för $Y = g(X)$

Från denna sats följer bl.a. följande:

$$E(h(X) + g(X)) = E(h(X)) + E(g(X))$$

med det viktiga specialfallet

Sats

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Varians

Väntevärdet säger ingen om hur X varierar.
Betrakta följande:

$$|X-\mu| \quad \text{och} \quad (X-\mu)^2$$

Vi leds nu till följande definition.

Definition

Variansen σ^2 för en s.v. X är

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2].$$

KTH Matematik

Varians

Följande räkneregel är mycket användbar:

Sats

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$

Bevis.

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] = E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X] \\ &= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu E[X] = E(X^2) - \mu^2. \end{aligned}$$

$\square$

KTH Matematik

Varians

I exemplet med tärningsspel har vi $\mu = 3.5 = \frac{21}{6}$. Vidare har vi

$$E(X^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 p_X(k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15.16$$

Enligt räkneregeln fås

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546 - 441}{36} = 2.92.$$

Varians

Sats

$V(aX + b) = a^2 V(X).$

Bevis.

$$V(aX + b) = E[(aX + b - E(aX + b))^2] = E[(aX + b - a\mu - b)^2]$$

$$= E[(aX - a\mu)^2] = a^2 E[(X - \mu)^2] = a^2 V(X).$$

$\square$

Standardavvikelsen

Definition

Standardavvikelsen σ *för en s.v.* X *är*

$$\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Sats

$D(aX + b) = |a|D(X).$

Allmänt gäller:

D – rätt sort.

V – lättare att räkna med.

Exponentialfördelningen.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy = \text{ part. int. } = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

KTH Matematik

Poissonfördelningen

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-2)!}\,e^{-\mu} = \mu^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{-\mu} = \mu^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!}\,e^{-\mu} = \mu^2.$$

Detta ger $\mu^2 = E(X(X-1)) = E(X^2) - \mu$, eller $E(X^2) = \mu^2 + \mu$, vilket ger

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

KTH Matematik

Flerdimensionella stokastiska variabler

Ofta mäter vi i samma slumpförsök flera storheter, och då beskrivs resultatet av en n-dimensionell stokastisk variabel $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Exempel

Slumpförsöket är att vi väljer en person slumpmässigt här i rummet, och sätter
X = *personens vikt;*
Y = *personens längd.*

Vi nöjer oss med att ge detaljer i det två-dimensionella fallet. Låt (X,Y) vara en två-dimensionell s.v.

$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$ kallas (den simultana) fördelningsfunktionen för (X, Y).

$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x,\ Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$ kallas den marginella fördelningsfunktionen för X.

$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$ kallas den marginella fördelningsfunktionen för Y.

KTH Matematik

Definition

X och Y är oberoende stokastiska variabler om

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

obs! Detta bör gälla för ALLA (x, y) .

Flerdimensionella stokastiska variabler

Definition

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *är oberoende stokastiska variabler om*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Omvänt gäller att om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende s.v. så fås den simultana fördelningen enl. definitionen ovan.

Normalfördelade stokastiska variabler

$X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

där μ godtycklig konstant och $\sigma > 0$.
$X \in N(0, 1)$ har tätheten

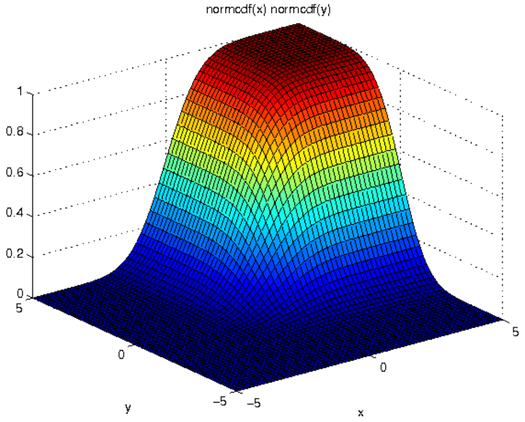
$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Man kan inte analytiskt ge fördelningsfunktionen, men vi inför

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(u)du$$

KTH Matematik

$\Phi(x) \cdot \Phi(y)$ återges i figuren:



normcdf (x) är funktionen i MATLAB *statistics toolbox*[1] för beräkning av $\Phi(x)$.

[1] `http://www.mathworks.com/products/statistics/`

Statistics toolbox i MATLAB

```
http://www.mathworks.com/products/statistics/
```

Statistics Toolbox^{TM} 6.2 provides engineers, scientists, researchers, financial analysts, and statisticians with a comprehensive set of tools to assess and understand their data. Statistics Toolbox software includes functions and interactive tools for analyzing historical data, modeling data, simulating systems, developing statistical algorithms, and learning and teaching statistics.
(Slut på produktplacering (för denna gång).) □

KTH Matematik

Simultan sannolikhetsfunktion

(X,Y) är en diskret två-dimensionell s.v., om

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{0 \le j \le [x]} \sum_{0 \le k \le [y]} p_{X,Y}(j,k) dudv$$

där

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k) = 1, \quad p_{X,Y}(j,k) \geq 0.$$

Funktionen $p_{X,Y}(i,k)$ kallas den simultana sannolikhetsfunktionen för (X,Y).

KTH Matematik

Simultan täthet

(X,Y) är en kontinuerlig två-dimensionell s.v., om

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

där

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1, \quad f_{X,Y}(x,y) \geq 0.$$

Funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ kallas den simultana täthetsfunktionen för (X,Y).

Marginalfördelningar fört kontinuerliga s.v.er

Låt (X,Y) vara en kontinuerlig två-dimensionell s.v.. Den marginella fördelningsfunktionen för Y är

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)\,dx\,dv$$

och

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

är den marginella täthetsfunktionen för Y. Analogt är

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

den marginella täthetsfunktionen för X.

Definition

X och Y är oberoende stokastiska variabler om

$$f_{X,Y}(x,y)(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

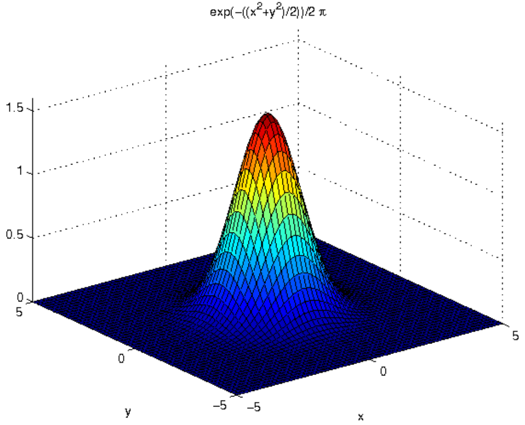
$X \in N(0,1),\ Y \in N(0,1)$

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

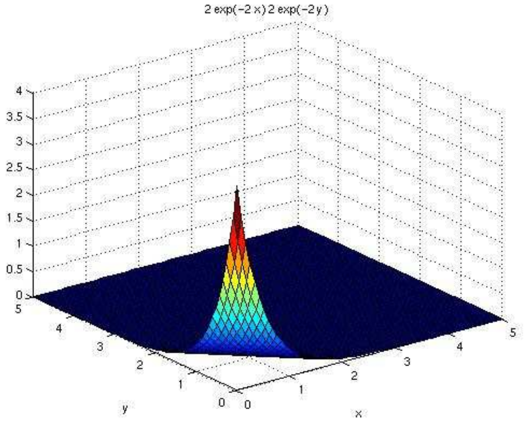
$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}$$

$$\varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Produkten $\varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$



$X \in \text{Exp}(2), Y \in \text{Exp}(2)$, oberoende



Största och minsta värdet: fördelning

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende s.v. med resp. fördelningsfunktioner $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)$.
Sätt

$$Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$Z = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Största och minsta värdet: fördelning

Vi har

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\text{alla } X_i \le y) = F_{X_1}(y) \cdots F_{X_n}(y)$$

och

$$F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le z)$$

$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > z) = 1 - P(\text{alla } X_i > z)$$

$$= 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)).$$

KTH Matematik

Största och minsta värdet: exempel

$$F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)).$$

Antag att $X_1 \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, $X_2 \in \mathrm{Exp}(\lambda)$,...,$X_n \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, dvs. alla är exponentialfördelade och har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \ge 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

Då är

$$1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)) = 1 - e^{-n\lambda x}$$

och vi har att $Z \in \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

Summans fördelning

Låt X och Y vara två oberoende kontinuerliga stokastiska variabler med tätheter $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.
Sätt $Z = X + Y$. Då gäller

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = P((X, Y) \in \{(x, y); x + y \leq z\})$$

$$= \int_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

(fixera x och integrera över y)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z - x)\, dx.$$

KTH Matematik

Summans fördelning

Z är också en kontinuerlig stokastisk variabel. Derivation map. z ger

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx.$$

Denna operation kallas *faltning*.

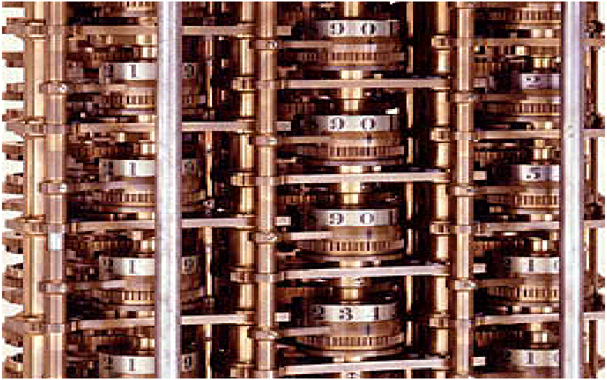
Funktioner av stokastiska variabler

Om $X, Y, Z \ldots$ är stokastiska variabler och $h(x, y, z)$ en funktion, så är

$$h\,(X, Y, Z)$$

en stokastisk variabel.

Babbages[2] differensmaskin



[2]Charles Babbage, 1791 - 1871