SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 4.
Funktioner av s.v:er, Flera stokastiska variabler. Marginell sannolikhetsfunktion och -täthetsfunktion. Oberoende sv:er, Maximum och minimum av oberoende sv:er, Fördelning för summa av oberoende st.v:er.

Gunnar Englund, Jan Grandell & Timo Koski

28.01.2016

KTH Matematik

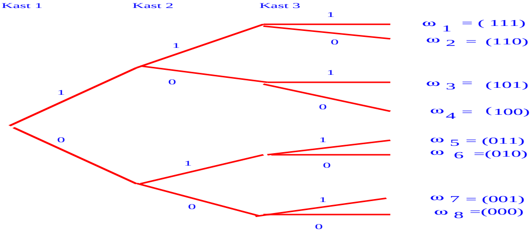
Funktioner av stokastiska variabler

Om X är en stokastisk variabel. Om $g(x)$ är en reellvärd funktion av x, så är

$$Y = g(X)$$

en stokastisk variabel, eftersom den är en funktion av en stokastisk variabel.

Tre oberoende kast av ett häftstift: funktion av en stokastisk variabel



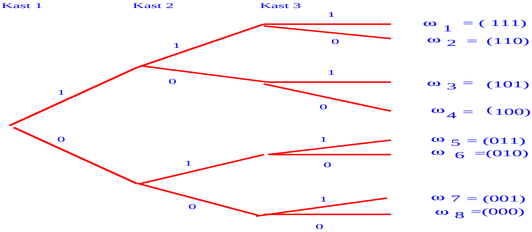
X = 'antalet ettor i tre oberoende kast av ett häftstift'. $g(x) = (x-2)^2$

$$Y = g(X) = (X-2)^2$$

$X(\omega_1) = 3, X(\omega_2) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = 2,$
$X(\omega_4) = X(\omega_6) = X(\omega_7) = 1,\ X(\omega_8) = 0.$

KTH Matematik

Tre oberoende kast av ett häftstift: sannolikhetsfunktion för $Y = (X-2)^2$



$$Y(\omega_1) = 1, Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = Y(\omega_5) = 0,$$
$$Y(\omega_4) = Y(\omega_6) = Y(\omega_7) = 1,\ Y(\omega_8) = 4.$$

$$P(Y=4) = (1-p)^3, P(Y=1) = p^3 + 3p(1-p)^2,$$

$$P(Y=0) = 3p^2(1-p)$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och Sl-täthet för $Y = g(X)$

Uppgift: bestäm fördelningsfunktionen $F_Y(y)$ för Y. Sedan kan man på känt sätt bestämma täthetsfunktionen/sannolikhetsfunktionen. Tillvägagångssättet är enklast om $g(x)$ antingen är strängt växande för alla x eller strängt avtagande för alla x. Vi ger tre exempel på denna situation.

KTH Matematik

SI-täthet för $Y = g(X)$

Vi begränsar oss dock till fallet då g är strikt växande. Denna begränsning förenklar beviset högst avsevärt.
Låt $g^{-1}(x)$ vara inversen till g. Då gäller

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

vilket ger

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} = F_X'(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}.$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = g(X)$: Linjär transformation

Vi antar att X är en kontinuerlig s.v. och sätter $Y = aX + b$.
1. a positivt

När a är positivt blir

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Fördelningsfunktionen för Y får man alltså genom att i fördelningsfunktionen $F_X(x)$ ersätta argumentet x med $(y-b)/a$. Täthetsfunktionen för Y erhålles sedan genom derivering med avseende på y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = g(X)$: Linjär transformation

2. *a* negativt

Om a är negativt blir i stället

$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right).$$

Eftersom X är en kontinuerlig s.v. är $P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right)$ och alltså blir

$$F_Y(y) = 1 - P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Genom derivering får man slutligen

$$f_Y(y) = -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = g(X)$: Linjär transformation

De bägge fallen $a > 0$ och $a < 0$ kan, vad täthetsfunktionen beträffar, sammanfattas så:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Om speciellt $a = -1$, $b = 0$ får man fördelningen för den s.v. $Y = -X$:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(-y) \text{ och } f_Y(y) = f_X(-y).$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = g(X)$

Anta att X har en likformig fördelning i intervallet $(0, 1)$. Då är

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ x & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{om } x > 1. \end{cases}$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = -(1/\lambda)\ln X$

Fördelningsfunktionen för den s.v. $Y = -(1/\lambda)\ln X$, där $\lambda > 0$, blir

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-(1/\lambda)\ln X \leq y) = P(\ln X \geq -\lambda y) = P\big(X \geq e^{-\lambda y}\big) \\ &= 1 - P\big(X < e^{-\lambda y}\big) = 1 - P(X \leq e^{-\lambda y}) = \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{om } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{om } y \geq 0. \end{cases}$$

Alltså gäller att $Y \in \text{Exp}(\lambda)$

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = g(X)$

Resultatet är av stort intresse vid simulering. Ur ett likformigt fördelat slumptal X på $(0, 1)$ kan man generera ett exponentialfördelat slumptal Y genom att låta $Y = -(1/\lambda) \ln X$.

Fördelningsfunktion och Sl-täthet för $Y = \sqrt{X}$

Sätt $Y = \sqrt{X}$ där X är en kontinuerlig s.v. som endast antar positiva värden. Vi får

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2) = F_X(y^2) & y > 0. \end{cases}$$

Derivering med avseende på y ger täthetsfunktionen för Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y \le 0 \\ 2y f_X(y^2) & \text{om } y > 0. \end{cases}$$

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = X^2$

Sätt $Y = X^2$ där X antas vara kontinuerlig. För $y \leq 0$ är $F_Y(y) = 0$. För $y > 0$ fås

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\big(X^2 \leq y\big) = P\big(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\,\big) \\ &= P\big(X \leq \sqrt{y}\,\big) - P\big(X < -\sqrt{y}\,\big). \end{aligned}$$

Eftersom X är kontinuerlig är $P\big(X < -\sqrt{y}\,\big) = P\big(X \leq -\sqrt{y}\,\big)$ och alltså blir

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) - P\big(X \leq -\sqrt{y}\,\big) = F_X\big(\sqrt{y}\,\big) - F_X\big(-\sqrt{y}\,\big).$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = X^2$

Derivering med avseende på y ger:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\left[f_X\left(\sqrt{y}\right) + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right] & \text{om } y > 0 \\ 0 & \text{om } y \leq 0. \end{cases}$$

KTH Matematik

Fördelningsfunktion och SI-täthet för $Y = X^2$

Antag speciellt att X är likformigt fördelad i intervallet $(-1, 1)$, så att

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Man får genom insättning i uttrycket för $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} & \text{om } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (1) \; (2)$$

$Y \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. $x_m > 0$. $X = x_m e^Y$. We bestämmer täthetsfunktionen för X. Eftersom $Y > 0$, så $e^Y > 1$, det följer att $X = x_m e^Y \geq x_m$. Således

$$P(X \leq x) = 0, \text{ om } x \leq x_m$$

Tag $x > x_m$.

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(x_m e^Y \leq x\right) = P\left(e^Y \leq \frac{x}{x_m}\right) = P\left(Y \leq \ln \frac{x}{x_m}\right)$$

$$= F_Y\left(\ln \frac{x}{x_m}\right) = 1 - e^{-\lambda\left(\ln \frac{x}{x_m}\right)} = 1 - \frac{x_m^\lambda}{x^\lambda}$$

d.v.s.

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = \begin{cases} 0 & x < x_m \\ 1 - \frac{x_m^\lambda}{x^\lambda}, & x \geq x_m. \end{cases}$$

KTH Matematik

Paretofördelning

$Y \in \mathrm{Exp}(\lambda)$. $x_m > 0$. $X = x_m e^Y$.

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = \begin{cases} 0 & x < x_m \\ 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\lambda}, & x \geq x_m. \end{cases}$$

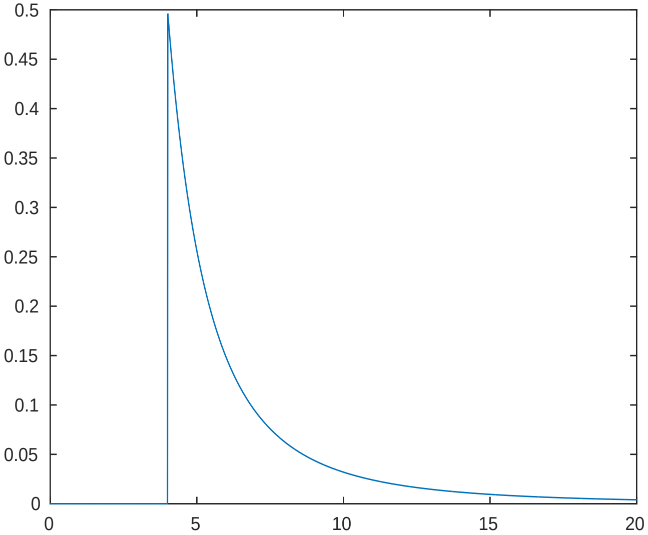
Täthetsfunktionen tas fram med derivering

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda x_{\mathrm{m}}^{\lambda}}{x^{\lambda+1}} & x \geq x_{\mathrm{m}}, \\ 0 & x < x_{\mathrm{m}}. \end{cases}$$

Vi säger att X är paretofördelad med parametrarna x_m och λ. SI-tätheten $f_X(x)$ kallas paretotäthet (potenslag).

KTH Matematik

Paretotäthet: $x_m = 4$ $\lambda = 2$



Paretofördelning Nordisk familjebok / Uggleupplagan. 21, 1915

Pareto [-tå], Y i l f r e d o, italiensk-schweizisk nationalekonom, f. 1848 i Paris, tillbragte sin ungdom dels i Italien, dels i Frankrike, utbildades till (järnvägs)ingenjör, men öfvergick småningom till nationalekonomien och kallades till lärare i detta ämne vid Lausannes universitet.
P. har tilldragit sig mycken uppmärksamhet genom sin med matematiska formler demonstrerade och af rikhaltiga statistiska uppgifter belysta teori om inkomstfördelningen mellan de olika samhällsmedlemmarna i skilda länder,

KTH Matematik

Paretoprincipen

Paretoprincipen är en empirisk regel enligt vilken 20 procent av orsakerna ofta står för 80 procent av verkan; den kallas ibland även 80/20-regeln. Vilfredo Pareto visade att 20 procent av den italienska befolkningen innehade 80 procent av egendomen och denna observation har av andra senare generaliserats.

KTH Matematik

Flerdimensionella stokastiska variabler

Ofta mäter vi i samma slumpförsök flera storheter, och då beskrivs resultatet av en n-dimensionell stokastisk variabel $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Exempel

Slumpförsöket är att vi väljer en person slumpmässigt här i rummet, och sätter
X = *personens vikt;*
Y = *personens längd.*

Vi nöjer oss med att ge detaljer i det två-dimensionella fallet. Låt (X,Y) vara en två-dimensionell s.v.
$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$ kallas (den simultana) fördelningsfunktionen för (X, Y).
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x,\ Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x, \infty)$ kallas den marginella fördelningsfunktionen för X.
$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$ kallas den marginella fördelningsfunktionen för Y.

KTH Matematik

Definition

X och Y är oberoende stokastiska variabler om

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

obs! Detta bör gälla för ALLA (x, y) .

KTH Matematik

Definition

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *är oberoende stokastiska variabler om*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n).$$

Omvänt gäller att om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende s.v. så fås den simultana fördelningen enl. definitionen ovan.

KTH Matematik

Simultan sannolikhetsfunktion

(X,Y) är en diskret två-dimensionell s.v., om

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{0 \le j \le [x]} \sum_{0 \le k \le [y]} p_{X,Y}(j,k) dudv$$

där

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k) = 1, \quad p_{X,Y}(j,k) \ge 0.$$

Funktionen $p_{X,Y}(i,k)$ kallas den simultana sannolikhetsfunktionen för (X,Y).

Simultan täthet

(X,Y) är en kontinuerlig två-dimensionell s.v., om

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$$

där

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1, \quad f_{X,Y}(x,y) \geq 0.$$

Funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ kallas den simultana täthetsfunktionen för (X,Y).

KTH Matematik

Marginalfördelningar fört kontinuerliga s.v.er

Låt (X,Y) vara en kontinuerlig två-dimensionell s.v.. Den marginella fördelningsfunktionen för Y är

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) dx dv$$

och

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

är den marginella täthetsfunktionen för Y. Analogt är

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

den marginella täthetsfunktionen för X.

KTH Matematik

Oberoende stokastiska variabler

Definition

X och Y är oberoende stokastiska variabler om

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Normalfördelade stokastiska variabler

$X \in N(0,1),\ Y \in N(0,1)$

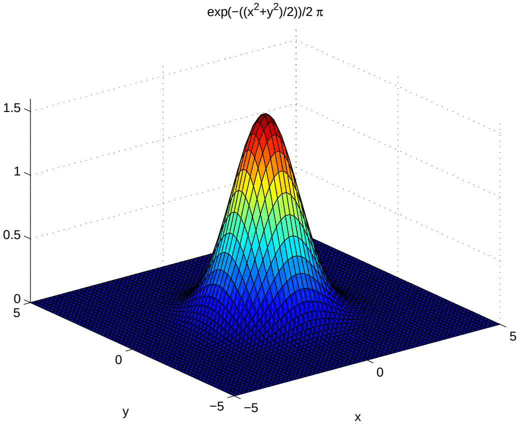
$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

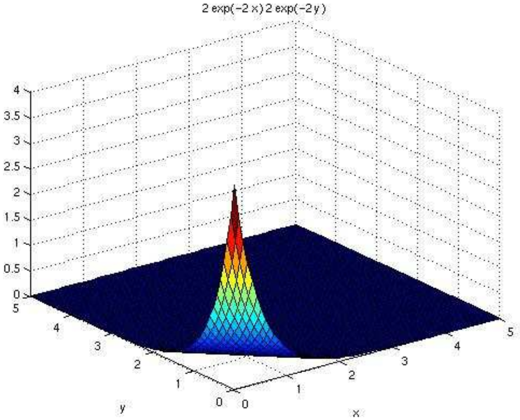
$$\varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

KTH Matematik

Produkten $\varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$



$X \in \mathrm{Exp}(2)$, $Y \in \mathrm{Exp}(2)$, oberoende



Sätt $Z = \max(X, Y)$. Eftersom $Z \leq z$ om och endast om både $X \leq z$ och $Y \leq z$ erhålls

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X \leq z \text{ och } Y \leq z) \\ &= P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Minsta värdet av två

Sätt $Z = \min(X, Y)$. Eftersom $Z > z$ om och endast om både $X > z$ och $Y > z$ får man

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X > z \text{ och } Y > z) \\ &= 1 - P(X > z)P(Y > z). \end{aligned}$$

Men $P(X > z) = 1 - P(X \leq z) = 1 - F_X(z)$ och analogt för Y. Alltså får man till sist

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]. \tag{4}$$

KTH Matematik

Största och minsta värdet: fördelning

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende s.v. med resp. fördelningsfunktioner $F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)$.
Sätt

$$Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$Z = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

KTH Matematik

Största och minsta värdet: fördelning

Vi har

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\text{alla } X_i \leq y) = F_{X_1}(y) \cdots F_{X_n}(y)$$

och

$$F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq z)$$
$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > z) = 1 - P(\text{alla } X_i > z)$$
$$= 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)).$$

KTH Matematik

$$F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)).$$

Antag att $X_1 \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, $X_2 \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, ...,$X_n \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, dvs. alla är exponentialfördelade och har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

Då är

$$1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)) = 1 - e^{-n\lambda x}$$

och vi har att $Z \in \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

KTH Matematik

Summans fördelning

Låt X och Y vara två oberoende kontinuerliga stokastiska variabler med tätheter $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.
Sätt $Z = X + Y$. Då gäller

$$F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = P((X, Y) \in \{(x, y);\, x + y \leq z\})$$

$$= \int_{x+y\leq z} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

(fixera x och integrera över y)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z - x)\, dx.$$

KTH Matematik

Summans fördelning

Z är också en kontinuerlig stokastisk variabel. Derivation map. z ger

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx.$$

Denna operation kallas *faltning*.

Funktioner av stokastiska variabler

Om $X, Y, Z \ldots$ är stokastiska variabler och $h(x, y, z)$ en funktion, så är

$$h\left(X, Y, Z\right)$$

en stokastisk variabel.