SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 5.
Kovarians, korrelation, väntevärde och varians för summor av s.v.:er, normalfördelning (del 1)

Jan Grandell & Timo Koski

15.09.2008

KTH Matematik

Väntevärdet av $g(X, Y)$

Sats

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell s.v. Då gäller

$$E\left[g(X,Y)\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dxdy & \text{för } (X,Y) \text{ kontinuerlig ,} \\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} g(k,j) f_{X,Y}(k,j) & \text{för } (X,Y) \text{ diskret.} \end{cases}$$

□

KTH Matematik

Väntevärdet av $g(X,Y) = X + Y$

Sats

Låt (X,Y) vara en tvådimensionell s.v. Då gäller

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

Bevis. Låt (X,Y) vara en kontinuerlig tvådimensionell s.v.. Den föregående satsen visar med $g(x,y) = x + y$ att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}x\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dydx + \int_{-\infty}^{\infty}y\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy = E[X] + E[Y]$$

KTH Matematik

Kovarians och korrelationskoefficient

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell s.v. där vi är intresserade av sambandet mellan Xs och Ys variation. Det kan vara natuligt att betrakta variablerna

$$X - \mu_X \quad \text{och} \quad Y - \mu_Y.$$

Vi skiljer på fallen då X och Y "samvarierar" resp. "motverkar varandra", dvs. då
ett stort/litet värde på X gör ett stort/litet värde på Y troligt
resp.
ett stort/litet värde på X gör ett litet/stort värde på Y troligt.

KTH Matematik

Kovariansen mellan X och Y

Betraktar vi nu variabeln

$$(X - \mu_X)(Y - \mu_Y),$$

så innebär detta att den i första fallet, eftersom $+ \cdot + = +$ och $- \cdot - = +$, att den har en tendens att vara positiv. På motsvarande sätt, eftersom $- \cdot + = -$ och $+ \cdot - = -$, har den i andra fallet en tendens att vara negativ. Det som vi, lite slarvigt, har kallat tendens, kan vi ersätta med väntevärde. Vi leds då till följande definition.

Definition

Kovariansen mellan X och Y är

$$C(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

där $\mu_X = E(X)$ och $\mu_Y = E(Y)$.

KTH Matematik

Kovariansen mellan X och Y

Sats

Kovariansen mellan X och Y är

$$C(X,Y) = E[XY] - \mu_X \cdot \mu_Y,$$

där $\mu_X = E(X)$ och $\mu_Y = E(Y)$.

Bevis. :

$$C(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y]$$

$$= E[XY] - E[X\mu_Y] - E[\mu_X Y] - \mu_X\mu_Y]$$

$$= E[XY] - \mu_Y E[X] - \mu_X E[Y] - \mu_X\mu_Y = E[XY] - \mu_Y\mu_X - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y$$

$$= E[XY] - \mu_Y\mu_X$$

Korrelationskoefficienten mellan X och Y

Kovariansen kan sägas ha fel sort. Det verkar rimligt att ett mått på ett så abstrakt begrepp som samvariation skall vara "sortfritt". Det vanligaste måttet är korrelationskoefficienten.

Definition

Korrelationskoefficienten mellan X och Y är

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)}.$$

Man kan visa att $|\rho| \leq 1$, där $\rho = \pm 1$ betyder att det finns ett perfekt linjärt samband, dvs. $Y = aX + b$.

Sats

Om X och Y är oberoende så är de okorrelerade, dvs. $\rho(X, Y) = 0$.

Omvändningen gäller *ej*, dvs. okorrelerade variabler kan vara beroende.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Exempel

Den simultana sannolikhetsfunktionen för stokastiska variablerna X och Y med $p_{X,Y}(j,k)$

X/Y	0	1	2	3
0	0.2	0	0	0
1	0	0.1	0.1	0
2	0	0.1	0.1	0
3	0	0	0	0.4

- Marginalfördelning för X:

$$p_X(0) = 0.2 + 0 + 0 + 0 = 0.2,$$

$$p_X(1) = 0 + 0.1 + 0.1 + 0 = 0.2$$

$$p_X(2) = 0 + 0.1 + 0.1 + 0 = 0.2,$$

$$p_X(3) = 0 + 0 + 0 + 0.4 = 0.4$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Exempel (forts.)

- På samma sätt fås marginalfördelning för Y:

$$p_Y(0) = 0.2, p_Y(1) = 0.2$$

$$p_Y(2) = 0.2, p_Y(3) = 0.4.$$

- X och Y är INTE oberoende, ty, t.ex.,

$$p_X(0) \cdot p_Y(0) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04 \neq 0.2 = p_{X,Y}(0,0)$$

KTH Matematik

Exempel (forts.): BETINGADE FÖRDELNINGAR

$$p_{X|Y=k}(j) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_Y(k)}, j = 0,1,2,3$$

$$p_{Y|X=j}(k) \overset{\text{def}}{=} \frac{p_{X,Y}(j,k)}{p_X(j)}, k = 0,1,2,3$$

I detta exempel

$$p_{Y|X=2}(0) = \frac{p_{X,Y}(2,0)}{p_X(2)} = \frac{0}{0.2} = 0$$

$$p_{Y|X=2}(1) = \frac{p_{X,Y}(2,1)}{p_X(2)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

$$p_{Y|X=2}(2) = \frac{p_{X,Y}(2,2)}{p_X(2)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

$$p_{Y|X=2}(3) = \frac{p_{X,Y}(2,3)}{p_X(2)} = \frac{0}{0.2} = 0$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Exempel (forts.): BETINGADE FÖRDELNINGAR

och

$$p_{X|Y=0}(0) = \frac{p_{X,Y}(0,0)}{p_Y(0)} = \frac{0.2}{0.2} = 1$$

$$p_{X|Y=0}(1) = p_{X|Y=0}(2) = p_{X|Y=0}(3) = 0$$

KTH Matematik

Exempel (forts.):LTS & BETINGADE FÖRDELNINGAR

Utifrån definitionerna följer vidare att vi har

$$p_X(k) = \sum_{j=0}^{3} p_Y(j) p_{X|Y=j}(k) = \sum_{j=0}^{3} p_{X,Y}(k,j).$$

$$p_Y(j) = \sum_{k=0}^{3} p_X(k) p_{Y|X=k}(j) = \sum_{k=0}^{3} p_{X,Y}(k,j).$$

KTH Matematik

Exempel (forts.):

$$E(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 = 1.8.$$

samt

$$E(Y) = 1.8.$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.4 = 4.6.$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = 4.6 - 1.8^2 = 1.36 = V(Y).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Exempel (forts.): Kovarians och korrelation

- $$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 1 \cdot 0.1$$
$$+1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 3 \cdot 0.4 = 4.5$$
- Kovariansen
$$\mathrm{C}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)\, E(Y) = 4.5 - 1.8 \cdot 1.8 = 1.26$$
- Korrelationskoefficienten
$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{C}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{1.26}{\sqrt{1.36}\sqrt{1.36}}$$
$$= \frac{1.26}{1.36} = 0.926.$$

Vad säger detta ?

KTH Matematik

Mer om väntevärden

Sats

Låt (X, Y) vara en tvådimensionell s.v. Då gäller

(1) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$;

(2) $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abC(X, Y)$.

Bevis. (1) har visats ovan.

KTH Matematik

Mer om väntevärden: Bevis av (2)

(2) fås av följande

$$V(aX+bY) = E[(aX+bY-a\mu_X-b\mu_Y)^2] = E[(aX-a\mu_X+bY-b\mu_Y)^2]$$

$$= E[a^2(X-\mu_X)^2 + b^2(Y-\mu_Y)^2 + 2ab(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abC(X,Y).$$

□

KTH Matematik

Mer om väntevärden

Följdsats

Låt X och Y vara två oberoende (okorrelerade räcker) s.v. Då gäller

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$
$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) \quad V(X-Y) = V(X) + V(Y).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Mer om väntevärden

Detta går att utvidga till godtyckligt många variabler:

Sats

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende (okorrelerade räcker) s.v. och sätt

$$Y = c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n.$$

Då gäller

$$E(Y) = c_1 E(X_1) + \ldots + c_n E(X_n)$$

och

$$V(Y) = c_1^2 V(X_1) + \ldots + c_n^2 V(X_n)$$

KTH Matematik

Arimetiskt medelvärde

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Sats

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då gäller att

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \textit{och} \quad D(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Uttrycket "$X_1, X_2, \ldots, X_n$ är likafördelade" betyder att de stokastiska variablernas fördelningar, dvs. att de stokastiska variablernas *statistiska egenskaper*, är identiska. *Utfallen* av variablerna varierar dock.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Tjebysjovs olikhet

Sats

(Tjebysjovs olikhet)
För varje $\varepsilon > 0$ *gäller*

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

(Ersätter vi ε med $k\sigma$ fås formuleringen i Blom m.fl.)

Bevis. Detta är den enda riktigt djupa satsen i kursen som vi kan bevisa. Vi nöjer oss med det kontinuerliga fallet. Vi har

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \geq \int_{|x-\mu|>\varepsilon} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|x-\mu|>\varepsilon} f_X(x)\,dx = \varepsilon^2 P(|X-\mu| > \varepsilon).$$

Stora talens lag

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Sats

Stora talens lag *För varje* $\varepsilon > 0$ *gäller*

$$P(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon) \to 0 \quad \textit{då } n \to \infty.$$

Bevis. Enl. Tjebysjovs olikhet gäller

$$P(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$$

då $n \to \infty$. □

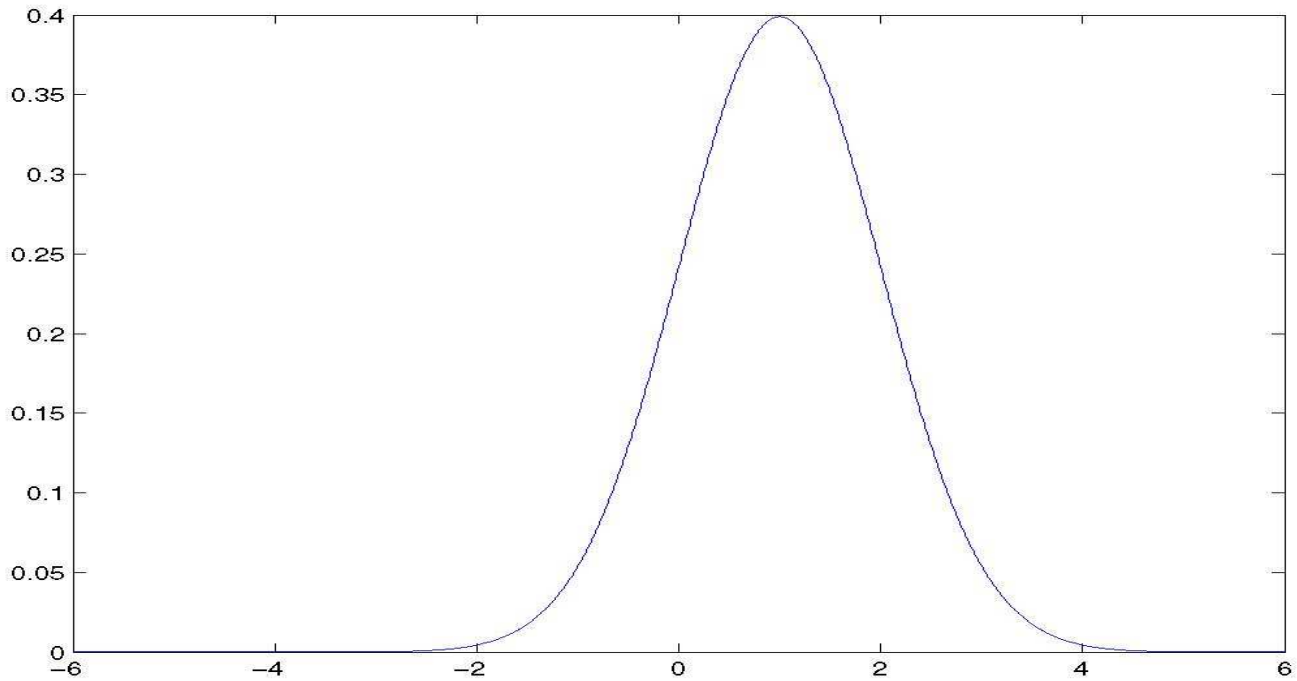
KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Normalfördelning

Vi gör en mer detaljerad studie av $X \in N(\mu, \sigma)$ med

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

där μ godtycklig konstant och $\sigma > 0$. I figuren för $f_X(x)$ har vi $\mu = 1, \sigma = 1$



KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Normalfördelning (även känd som Gaussfördelning efter C.F. Gauss, 1777-1855)

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

Definition

En s.v. Z säges vara standardiserad normalfördelad om den är $N(0,1)$-fördelad, dvs. om den har täthetsfunktionen

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

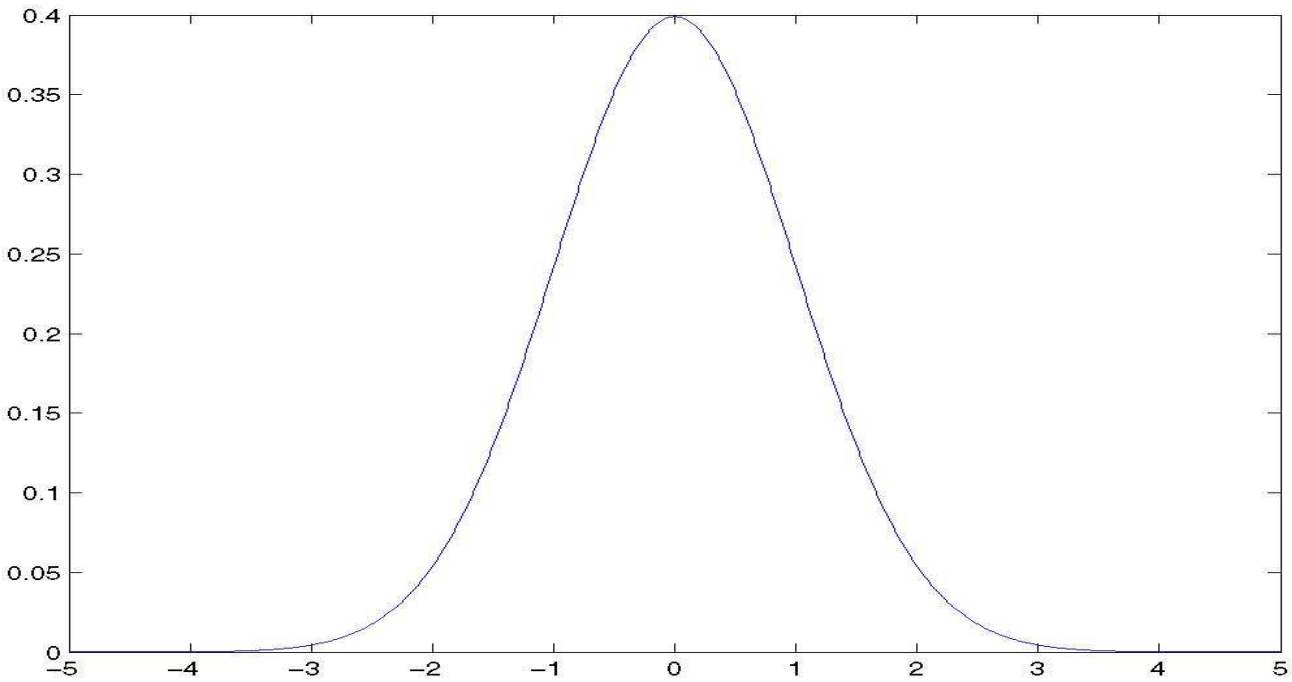
Dess fördelningsfunktion betecknas med $\Phi(z)$, dvs.

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$



KTH Matematik

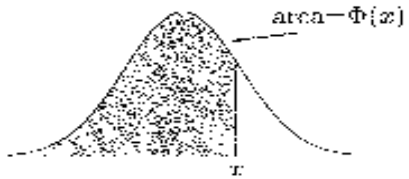
$\Phi(z)$

Ett problem är att fördelningsfunktionen inte kan ges på en analytisk form. Det är dock lätt att numeriskt beräkna fördelningsfunktionen och vi använder programvara för beräkning av $\Phi(x)$. (T.ex. normcdf.m i MATLAB Statistics Toolbox.) I våra tentor använder vi dock en tabell över $\Phi(x)$, som återfinns i kursens formelsamling.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Tabellen för $\Phi(x)$ ur kursens formelsamling

Tabell 1. Standard normalfördelning.
$\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \in N(0,1)$.
För negativa x, utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621

KTH Matematik

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Vi observerar att $\varphi(-z) = \varphi(z)$. $\Phi(z)$ är tabulerad i kursens formelsamling endast för $z \geq 0$. Vi har dock

$$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \varphi(x)\,dx = [y = -x] = -\int_{\infty}^{z} \varphi(-y)\,dy$$

$$= \int_{z}^{\infty} \varphi(y)\,dy = 1 - \Phi(z).$$

Sats

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

$Z \in N(0,1)$, $E(Z)$, $V(Z)$

Om Z är $N(0,1)$-fördelad, så kan man visa att

$$E(Z) = 0 \quad (\text{ty } \varphi(-z) = \varphi(z))$$
$$V(Z) = 1.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Kvantiler

När vi kommer till statistikdelen av kursen behöver vi ofta lösa ekvationer av följande slag:
Bestäm z så att vi för givet α har

- $P(Z \leq z) = 1 - \alpha$;
- $P(Z > z) = 1 - \alpha$;
- $P(-z < Z \leq z) = 1 - \alpha$.

För att lösa sådana ekvationer inför vi α-kvantilen λ_α definierad av $P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha$ eller

$$\alpha = 1 - \Phi(\lambda_\alpha).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Kvantiler (forts.)

$$\alpha = 1 - \Phi(\lambda_\alpha).$$

Det är då bra att observera att

$$1 - \alpha = 1 - \Phi(\lambda_{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha = \Phi(\lambda_{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha = 1 - \Phi(-\lambda_{1-\alpha}),$$

vilket ger

$$\lambda_{1-\alpha} = -\lambda_\alpha.$$

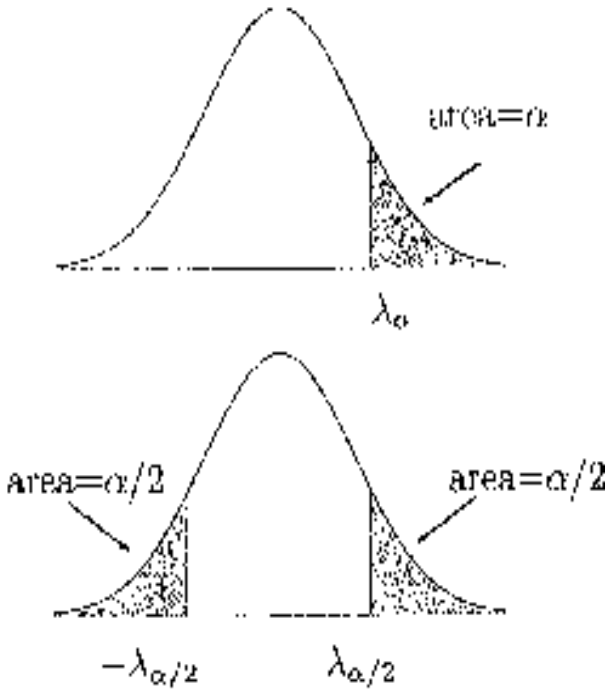
KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Kursens formelsamling: kvantiler

Tab 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \subset N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Allmän normalfördelning

Definition

En s.v. X säges vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad, där μ reell och $\sigma > 0$, om

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{är } N(0,1)\text{-fördelad.}$$

KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Sats

Låt X vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad. Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

och

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Bevis. Vi har

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Derivation ger $f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. □

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

En viktig regel

Beviset ovan innehåller en viktig räkneregel. Om X är $N(\mu,\sigma)$-fördelad, så gäller det att

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Man kan m.a.o. använda tabellen för $\Phi(x)$ även för att beräkna $F_X(x)$ för $X \in N(\mu,\sigma)$.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Sats

Om X är $N(\mu,\sigma)$-fördelad så gäller

$$E(X) = \mu \quad \textit{och} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Bevis. Vi ska nu se hur listig definitionen är!

$$X = \sigma Z + \mu$$

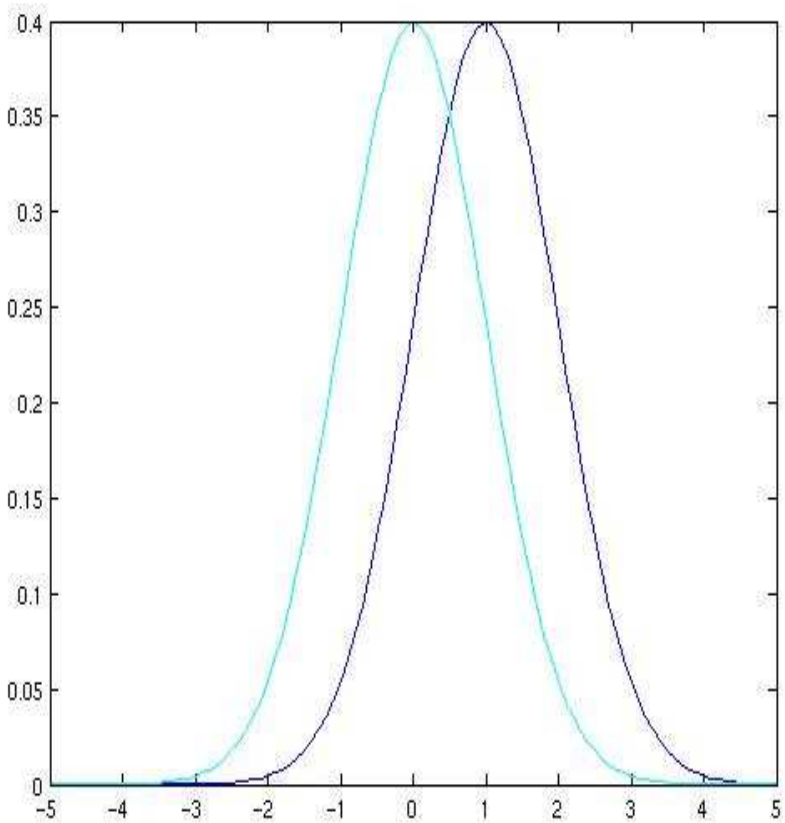
$$E(X) = \sigma E(Z) + \mu = 0 + \mu = \mu$$

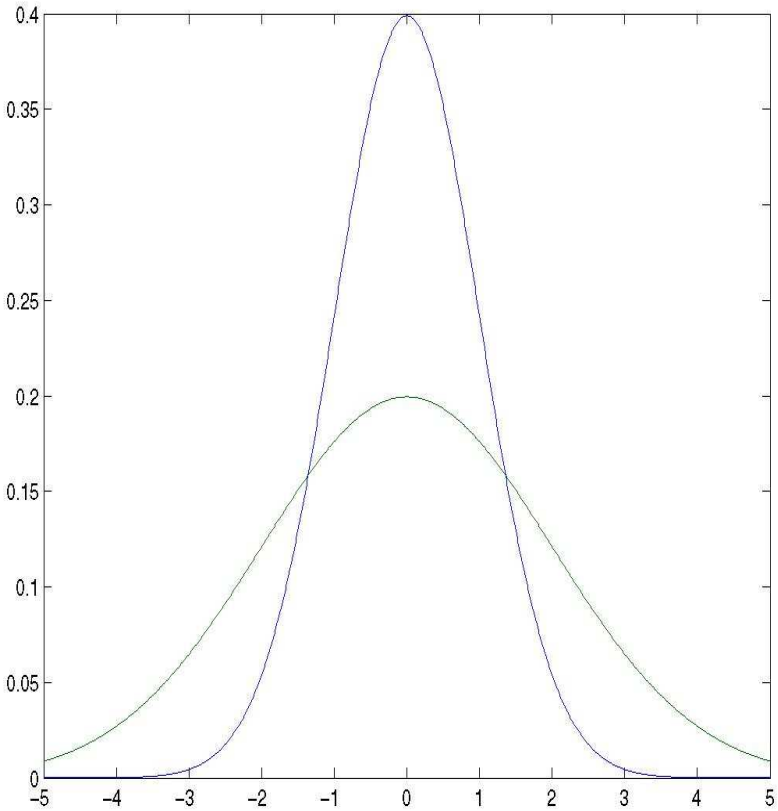
$$V(X) = \sigma^2 V(Z) + 0 = \sigma^2.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Täthetsfunktionerna för $N(0,1)$ och $N(1,1)$ och $N(0,1)$ och $N(0,2)$ (från vänster till höger)





Allmän normalfördelning

Sats

Låt X vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad och sätt $Y = aX + b$. Då gäller det att

$$Y \text{ är } N(a\mu + b, |a|\sigma)\text{-fördelad.}$$

Bevis. Från definitionen följer att $X = \mu + \sigma Z$ där Z är $N(0,1)$-fördelad. Detta ger

$$Y = aX + b = a(\mu + \sigma Z) + b = a\mu + b + a\sigma Z$$

$$\frac{Y - (a\mu + b)}{a\sigma} = Z.$$

Om $a > 0$ följer satsen. Om $a < 0$ utnyttjar vi att Z och $-Z$ har samma fördelning.

KTH Matematik

SLUTLIGEN :

Hur vet vi att $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$ är en sannolikhetstäthet ? Dvs. varför gäller det att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Svaret ges t.ex. i Eike Petermann: *Analytiska metoder II*, Studentlitteratur 2002, sid. 235, Ex. 9.14, Anmärkning 9.6 eller bilagan nedan

KTH Matematik

Bilaga (ur Eike Petermann: *Analytiska metoder II*) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Exempel 9.14:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos v, & 0 \le r \\ y = r\sin v, & 0 \le v < 2\pi, \end{cases} \det\left(\frac{d(x,y)}{d(r,v)}\right) = r\right] =$$

$$= \iint_{\substack{0\le r \\ 0\le v\le 2\pi}} e^{-r^2} r\, dr dv = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\right] dv = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \cdot \int_0^{2\pi} dv =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \cdot \left[v\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

■

KTH Matematik

Bilaga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

9.6

Anmärkning 9.6:

Använder man sats 9.11 utan föregående substitution på integralen i exemplet ovan, så får man:

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\right]dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Eftersom dubbelintegralens värde beräknades till π, får man det anmärkningsvärda resultatet:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

Trots att e^{-x^2} saknar elementär primitiv funktion[20] så kan alltså den speciella integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ beräknas exakt!

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Bilaga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Sambandet är av intresse bland annat för normalfördelningen i sannolikhetsläran (jämför exempel 9.12): Konstanten k i frekvensfunktionen

$$f(x) = k \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}$$

måste väljas så att $\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1$

Efter variabelsubstitutionen $x = \sigma\sqrt{2}t$ får man

$$\frac{1}{k} = \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

dvs. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ ■

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik