SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 5.
Väntevärde; Väntevärde för funktioner av s.v:er; Varians; Tjebysjovs olikhet.

Jan Grandell & Timo Koski

28.01.2015

KTH Matematik

Väntevärden

Vi ska nu införa begreppet väntevärde för en s.v. Detta är den teoretiska motsvarigheten till begreppet medelvärde för en talföljd.
Antag att vi har en lång talföljd $x_1, \ldots, x_n$, där talen är ganska små heltal. Medelvärdet definierades av

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Det kan vara bekvämt att göra omskrivningen

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot f_i,$$

där

$$f_i = \frac{\text{antalet } \{k;\ x_k = i\}}{n}.$$

KTH Matematik

Väntevärden

När vi diskuterade tolkningen av begreppet sannolikhet, så sa vi att

$$\frac{\text{antalet gånger } A \text{ inträffar}}{n} \to P(A) \text{ då } n \text{ växer.}$$

För diskreta s.v. gäller då att $f_k \to p_X(k)$ då $k \to \infty$. Vi leds av detta till följande definition:

Definition

Väntevärdet μ *för en s.v.* X *är*

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) & \textit{i diskreta fallet,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx & \textit{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

Väntevärden Vi skall alltid anta att

$$\sum_{k=0}^{\infty} |k| p_X(k) < \infty \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx < \infty.$$

Väntevärdet ger samma information och samma brist på information för den s.v. som medelvärdet ger för en talföljd.

Väntevärden: tvåpunktsfördelning

X säges vara *tvåpunktsfördelad* om X antar endast två värden a och b. $p_X(a) = p$ och $p_X(b) = 1 - p$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = a \cdot p + b \cdot (1 - p).$$

$E(X)$ är ett tal mellan a och b eller en konvex kombination av a och b . Om $a = 1$ och $b = 0$, är X *Bernoulli-fördelad*, $X \in \mathrm{Be}(p)$.

$$p_X(k) = \begin{cases} p & \text{för } k = 0 \\ 1 - p & \text{för } k = 1 \\ 0 & \text{för övriga värden på } k, \end{cases}$$

vilket ger

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

KTH Matematik

Väntevärden

Låt oss tänka på tärningskast igen. Hur mycket skulle ni vara villiga att betala för följande spel: Jag kastar en tärning, och ni får lika många kronor som det blir ögon?
Vi har

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{för } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{för övriga värden på } k, \end{cases}$$

vilket ger med formeln för summan av en aritmetisk serie

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = \sum_{k=1}^{6} k \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \frac{6(6+1)}{2} = \frac{42}{12} = 3.5.$$

Väntevärde för Poissonfördelningen

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}, \text{ för } k = 1, 2 \ldots .$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!}\, e^{-\mu}$$

$$= \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}\, e^{-\mu} = \mu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!}\, e^{-\mu} = \mu.$$

KTH Matematik

Väntevärde för exponentialfördelningen

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

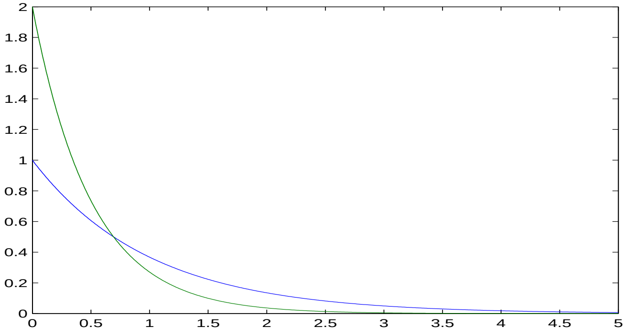
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \begin{pmatrix} y = \lambda x \\ x = y/\lambda \\ dx = dy/\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} ye^{-y}\, dy = \frac{1}{\lambda}\left[-ye^{-y}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = 0 - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

KTH Matematik

Väntevärde för exponentialfördelningen

Funktionsgraferna i bilden är sl-tätheterna för Exp(1) (i blått) och Exp(2) (i grönt): väntevärdet för Exp(2) $= 1/2 < 1 =$ väntevärdet för Exp(1)



Väntevärde för binomialfördelningen

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ för } k = 0, 1, \ldots, n.$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_X(k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} p^{(k-1)} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

Variabelbytet $j = k-1$, $j = 0, \ldots, n-1$ ger

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = np,$$

ty $\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$ är sannolikhetsfunktionen för $\mathrm{Bin}(n-1, p)$. Det finns ett enklare resonemang.

Funktioner av stokastiska variabler

Om X är en stokastisk variabel. Om $g(x)$ är en reellvärd funktion av x, så är

$$Y = g(X)$$

en stokastisk variabel, eftersom den är en funktion av en stokastisk variabel.

Väntevärde för $Y = g(X)$

Antag att vi känner förd. för X, och vill beräkna $E(Y)$ där $Y = g(X)$. Följande, skenbart oskyldiga, sats är ordentligt svår att bevisa i det kontinuerliga fallet

Sats

Väntevärdet för $g(X)$ är

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g(k) p_X(k) & \textit{i diskreta fallet,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \textit{i kontinuerliga fallet.} \end{cases}$$

KTH Matematik

Väntevärde för $Y = g(X)$

Bevis. Blom m.fl. visar satsen i det diskreta fallet, så vi betraktar det kontinuerliga fallet. Vi begränsar oss dock till fallet då g är strikt växande. Denna begränsning förenklar beviset högst avsevärt.
Låt $g^{-1}(x)$ vara inversen till g. Då gäller

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

vilket ger

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} = F'_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}.$$

KTH Matematik

Väntevärde för $Y = g(X)$

Av detta fås

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}\, dy$$

$$= \begin{pmatrix} x = g^{-1}(y) \\ dx = \frac{dg^{-1}(y)}{dy}\, dy \\ y = g(x) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

□

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Väntevärde för $Y = g(X)$

Från denna sats följer bl.a. följande:

$$E(h(X) + g(X)) = E(h(X)) + E(g(X))$$

med det viktiga specialfallet

Sats

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Varians

Väntevärdet säger ingen om hur X varierar.
Betrakta följande:

$$|X - \mu| \quad \text{och} \quad (X - \mu)^2$$

Vi leds nu till följande definition.

Definition

Variansen σ^2 för en s.v. X är

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

KTH Matematik

Följande räkneregel är mycket användbar:

Sats

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Bevis.

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 + \mu^2 - 2\mu X]$$
$$= E[X^2] + \mu^2 - 2\mu E[X] = E(X^2) - \mu^2.$$

$\square$

KTH Matematik

Varians: tvåpunktsfördelning

X antar endast två värden a och b. $p_X(a) = p$ och $p_X(b) = 1 - p$, vi har sett att $\mu = E(X) = a \cdot p + b \cdot (1 - p)$.

$$E(X^2) = a^2 \cdot p + b^2 \cdot (1 - p).$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$= a^2 \cdot p + b^2 \cdot (1 - p) - a^2 \cdot p^2 - 2abp(1 - p) - b^2 \cdot (1 - p)^2$$

och en viss dos aritmetik ger

$$= \ldots = p(1 - p)\,(a - b)^2\,.$$

D.v.s en växande funktion av avståndet mellan a och b, vilket i detta fall känns som en naturlig egenskap.

Varians

I exemplet med tärningsspel har vi $\mu = 3.5 = \frac{21}{6}$. Vidare har vi

$$E(X^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 p_X(k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15.16$$

Enligt räkneregeln fås

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546 - 441}{36} = 2.92.$$

Varians

Sats

$V(aX+b) = a^2 V(X).$

Bevis.

$$V(aX+b) = E[(aX+b-E(aX+b))^2] = E[(aX+b-a\mu-b)^2]$$

$$= E[(aX-a\mu)^2] = a^2 E[(X-\mu)^2] = a^2 V(X).$$

$\square$

Standardavvikelsen

Definition

Standardavvikelsen σ *för en s.v.* X *är*

$$\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Sats

$D(aX + b) = |a|D(X).$

Allmänt gäller:

D – rätt sort.

V – lättare att räkna med.

KTH Matematik

Standardisering av en st.v. X

X har $\mu = E[X]$ och $\sigma^2 = V(X)$. Sätt

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Enligt räknereglerna ovan fås

$$E[Z] = \frac{E[X-\mu]}{\sigma} = \frac{E[X]-\mu}{\sigma} = 0.$$

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2} V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1.$$

Exponentialfördelningen.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y}\, dy = \text{ part. int. } = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

KTH Matematik

Poissonfördelningen

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^k}{(k-2)!}\,e^{-\mu} = \mu^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{-\mu} = \mu^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}\,e^{-\mu} = \mu^2.$$

Detta ger $\mu^2 = E(X(X-1)) = E(X^2) - \mu$, eller $E(X^2) = \mu^2 + \mu$, vilket ger

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu.$$

KTH Matematik

Markovs olikhet

Sats

(Markovs olikhet)

För varje $a > 0$ och icke-negativ stokastisk variabel Y gäller

$$P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

Bevis. Vi nöjer oss med det kontinuerliga fallet. Vi har

$$E(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y)\,dy = \int_0^a y f_Y(y)\,dy + \int_a^\infty y f_Y(y)\,dy \geq \int_a^\infty y f_Y(y)\,dy$$

$$\geq a \int_a^\infty f_Y(y)\,dy = a \cdot P(Y \geq a).$$

Sats

(Tjebysjovs olikhet)
För varje $\varepsilon > 0$ gäller

$$P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Bevis. Detta är den enda riktigt djupa satsen i kursen som vi kan bevisa. Vi nöjer oss med det kontinuerliga fallet. Ett alternativt bevis kan ges m.h.a. Markovs olikhet: Vi har

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \geq \int_{|x-\mu|>\varepsilon} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|x-\mu|>\varepsilon} f_X(x)\,dx = \varepsilon^2 P(|X-\mu| > \varepsilon).$$

Tjebysjovs olikhet II (k standardavvikelser)

Ersätter vi ε med $k\sigma$ fås olikheten i Blom m.fl.:

Sats

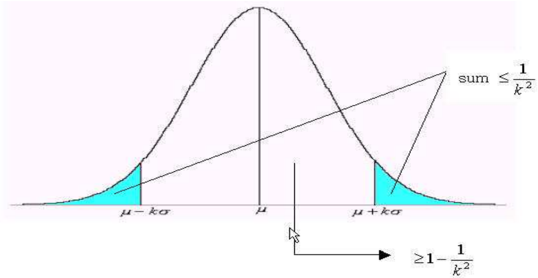
(Tjebysjovs olikhet) *För varje $k > 0$ gäller*

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

'Ingenjörsmässig' formulering av denna olikhet (i fallet tre standardavvikelser): sannolikheten att data ligger inom intervallet $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ är minst $1 - 1/9 = 0.89$.

KTH Matematik

Tjebysjovs olikhet III (k standardavvikelser)



Ex) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

$E[X] = 0$

$Var[X] = E[X^2] - 0 = E[X^2] = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 \frac{1}{2\sqrt{3}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{3} [x^3]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 1$

$P[|X - \mu| > k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$

KTH Matematik