SF1901: Sannolikhetslära och statistik
Föreläsning 6.
Normalfördelning, Centrala gränsvärdessatsen, Approximationer

Jan Grandell & Timo Koski

06.02.2012

KTH Matematik

Standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

Definition

En s.v. Z säges vara standardiserad normalfördelad om den är $N(0,1)$-fördelad, dvs. om den har täthetsfunktionen

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

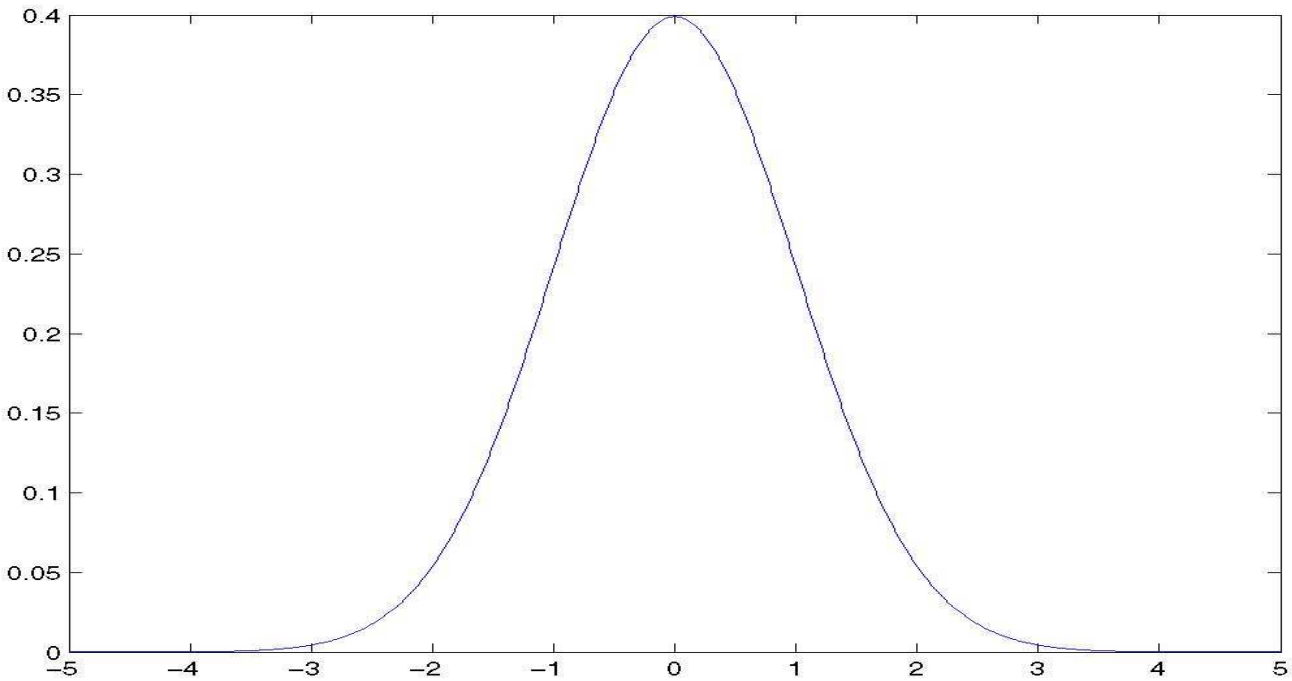
Dess fördelningsfunktion betecknas med $\Phi(z)$, dvs.

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

KTH Matematik

Standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$



KTH Matematik

En bilaga i fin stil (kan överhoppas)

Hur vet vi att $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}$ är en sannolikhetstäthet ? Dvs. varför gäller det att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Svaret ges t.ex. i Eike Petermann: *Analytiska metoder II*, Studentlitteratur 2002, sid. 235, Ex. 9.14, Anmärkning 9.6 eller bilagan nedan

KTH Matematik

Bilaga (ur Eike Petermann: *Analytiska metoder II*) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Exempel 9.14:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos v, & 0 \le r \\ y = r\sin v, & 0 \le v < 2\pi, \end{cases} \det\left(\frac{d(x,y)}{d(r,v)}\right) = r\right] =$$

$$= \iint_{\substack{0\le r \\ 0\le v\le 2\pi}} e^{-r^2} r\, dr dv = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\right] dv = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \cdot \int_0^{2\pi} dv =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \cdot \left[v\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi.$$

■

Bilaga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

9.6

Anmärkning 9.6:

Använder man sats 9.11 utan föregående substitution på integralen i exemplet ovan, så får man:

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dx\right]dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Eftersom dubbelintegralens värde beräknades till π, får man det anmärkningsvärda resultatet:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

Trots att e^{-x^2} saknar elementär primitiv funktion[20] så kan alltså den speciella integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ beräknas exakt!

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Sista sidan i bilagan :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1.$$

Sambandet är av intresse bland annat för normalfördelningen i sannolikhetsläran (jämför exempel 9.12): Konstanten k i frekvensfunktionen

$$f(x) = k \cdot e^{-x^2/2\sigma^2}$$

måste väljas så att $\int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-x^2/2\sigma^2} dx = 1$

Efter variabelsubstitutionen $x = \sigma\sqrt{2}t$ får man

$$\frac{1}{k} = \sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi}$$

dvs. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Standardiserad normalfördelning, $N(0,1)$

Fördelningsfunktionen betecknas med $\Phi(z)$, dvs.

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Av symmetriskäl gäller klart att

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Beräkning av $\Phi(z)$: MATLAB

Ett problem är att fördelningsfunktionen inte kan ges på en sluten analytisk form. Det är dock lätt att numeriskt beräkna fördelningsfunktionen och vi använder programvara för beräkning av $\Phi(x)$. I MATLAB Statistics Toolbox beräknas $\Phi(1)$ av :

$$>> \text{normcdf}(1, 0, 1)$$

$$\text{ans} =$$

$$0.84134474607$$

KTH Matematik

Beräkning av $\Phi(z)$: TI-82 STATS

Ta fram menyn DISTR med tangentsekvensen 2nd DISTR. Gå ned till **normalcdf(**. Då beräknas $\Phi(1)$ av[1]:

$$\text{normcdf}(-1E99, 1, 0, 1)$$

$$.8413447404$$

Man kan även skriva (d.v.s. 0 och 1 är defaultvärden)

$$\text{normcdf}(-1E99, 1)$$

$$.8413447404$$

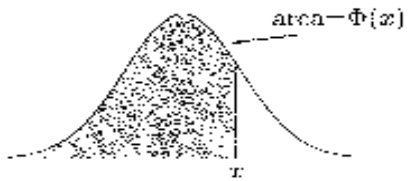
[1] E tas fram med tangentsekvensen 2ND E

KTH Matematik

Tabellen för $\Phi(x)$ ur kursens formelsamling

Vi slår upp $\Phi(1)$ som .8413

Tabell 1. Standard normalfördelning.
$\Phi(x) = P(X \leq x)$, där $X \in N(0,1)$.
För negativa x, utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621

KTH Matematik

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Vi observerar att $\varphi(-z) = \varphi(z)$. $\Phi(z)$ är tabulerad i kursens formelsamling endast för $z \geq 0$. Vi har dock

$$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \varphi(x)\,dx = [y = -x] = -\int_{\infty}^{z} \varphi(-y)\,dy$$

$$= \int_{z}^{\infty} \varphi(y)\,dy = 1 - \Phi(z).$$

Sats

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

KTH Matematik

$Z \in N(0,1)$, $E(Z)$, $V(Z)$

Om Z är $N(0,1)$-fördelad, så kan man visa att

$$E(Z) = 0 \quad (\text{ty } \varphi(-z) = \varphi(z))$$
$$V(Z) = 1.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Kvantiler

När vi kommer till statistikdelen av kursen behöver vi ofta lösa ekvationer av följande slag:
Bestäm z så att vi för givet α har

- $P(Z \leq z) = 1 - \alpha$;
- $P(Z > z) = 1 - \alpha$;
- $P(-z < Z \leq z) = 1 - \alpha$.

För att lösa sådana ekvationer inför vi α-kvantilen λ_α definierad av $P(Z > \lambda_\alpha) = \alpha$ eller

$$\alpha = 1 - \Phi(\lambda_\alpha).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Kvantiler i TI-82 STATS invNorm(

Vi vill ta fram $\lambda_{0.05}$ definierad av ekvationen $P(Z > \lambda_{0.05}) = 0.05$ eller

$$0.05 = 1 - \Phi(\lambda_{0.05}) \Leftrightarrow \Phi(\lambda_{0.05}) = 0.95$$

Vi knappar in i räknären (meny DISTR)

$$\text{invNorm}(0.95, 0, 1)$$

som ger lösningen

1.644853626

(≈ 1.6449).

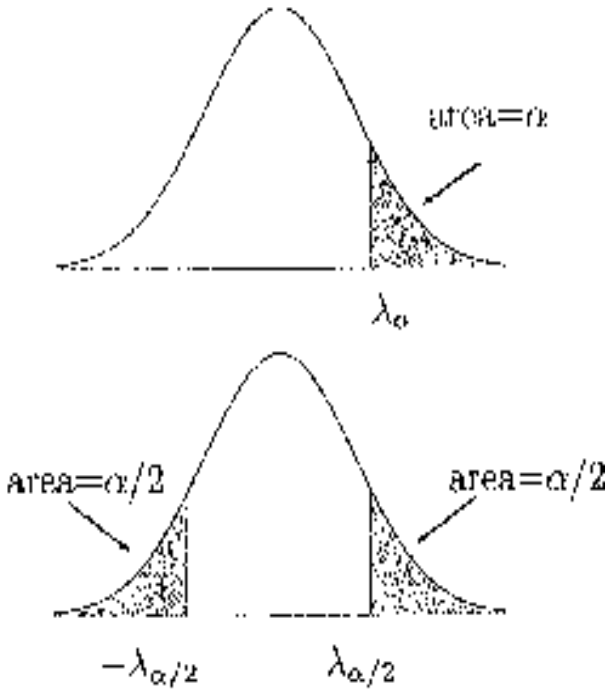
Kursens formelsamling: kvantiler

Tabell 2 i kursens formelsamling ger $\lambda_{0.05} = 1.6449$.

Tab 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \subset N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.10	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.010	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Kvantiler (forts.)

$$\alpha = 1 - \Phi(\lambda_\alpha).$$

Det är då bra att observera att

$$1 - \alpha = 1 - \Phi(\lambda_{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha = \Phi(\lambda_{1-\alpha})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha = 1 - \Phi(-\lambda_{1-\alpha}),$$

vilket ger

$$\lambda_{1-\alpha} = -\lambda_\alpha.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Definition

En s.v. X säges vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad, där μ reell och $\sigma > 0$, om

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{är } N(0,1)\text{-fördelad.}$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Sats

Låt X vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad. Då gäller

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

och

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Bevis. Vi har

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Derivation ger $f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. □

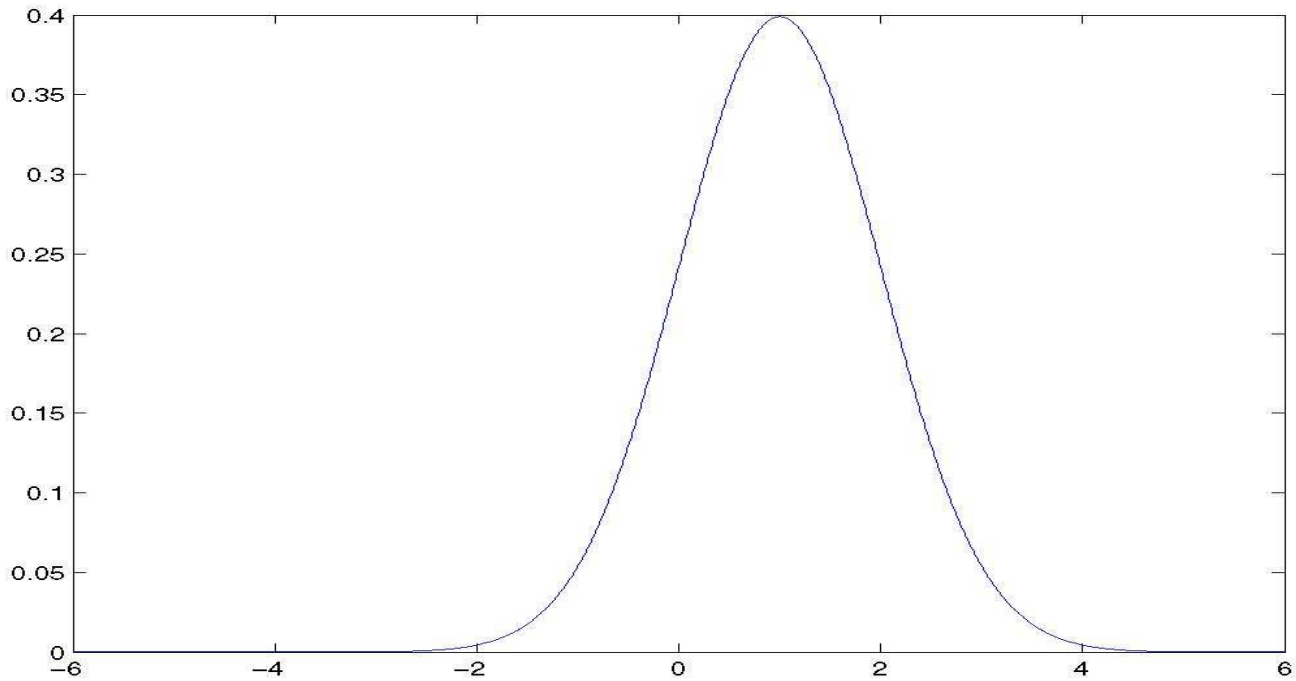
KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Normalfördelning

$X \in N(\mu, \sigma)$ med

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

där μ godtycklig konstant och $\sigma > 0$. I figuren för $f_X(x)$ har vi $\mu = 1, \sigma = 1$



KTH Matematik

Normalfördelning (även känd som Gaussfördelning efter C.F. Gauss, 1777-1855)

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Normalfördelning i kinetiska gasteorin

$X \in N(0, \sigma)$ med

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\, e^{-mx^2/2k_B T}$$

d.v.s. $\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, $k_B =$ Boltzmans konstant, $T =$ temperatur, $m =$ partikelns massa. "the fraction of particles in with velocities in the x-direction within $x, x + dx = f_X(x)dx$". .

KTH Matematik

En viktig regel

Beviset ovan innehåller en viktig räkneregel. Om X är $N(\mu,\sigma)$-fördelad, så gäller det att

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Man kan m.a.o. använda tabellen för $\Phi(x)$ även för att beräkna $F_X(x)$ för $X \in N(\mu,\sigma)$.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

TI-82 STATS

Smidigare än med regeln ovan och tabellen kan vi beräkna, om $X \in N(\mu, \sigma)$, sannolikheten $F_X(x) = P(X \leq x)$ som

$$\text{normcdf}(-1E99, x, \mu, \sigma)$$

Till exempel, om $X \in N(2,2)$ och beräknas $P(0 \leq X \leq 3.5)$ med TI-82 STATS som

$$\text{normcdf}(0, 3.5, 2, 2)$$

$$.614717461$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Allmän normalfördelning

Sats

Om X är $N(\mu,\sigma)$-fördelad så gäller

$$E(X) = \mu \quad \textit{och} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Bevis. Vi ska nu se hur listig definitionen är!

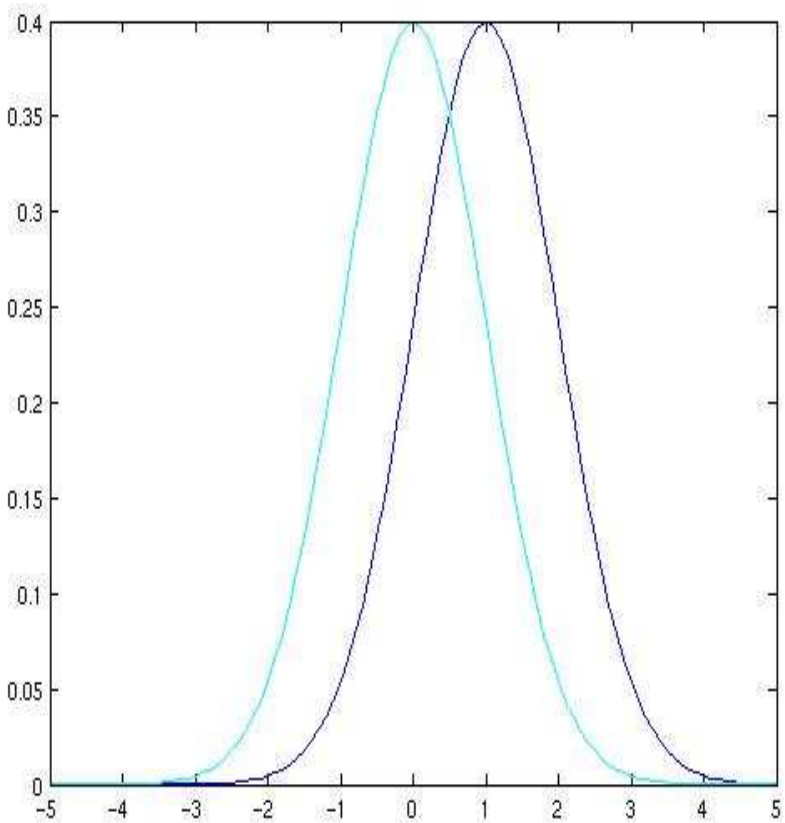
$$X = \sigma Z + \mu$$

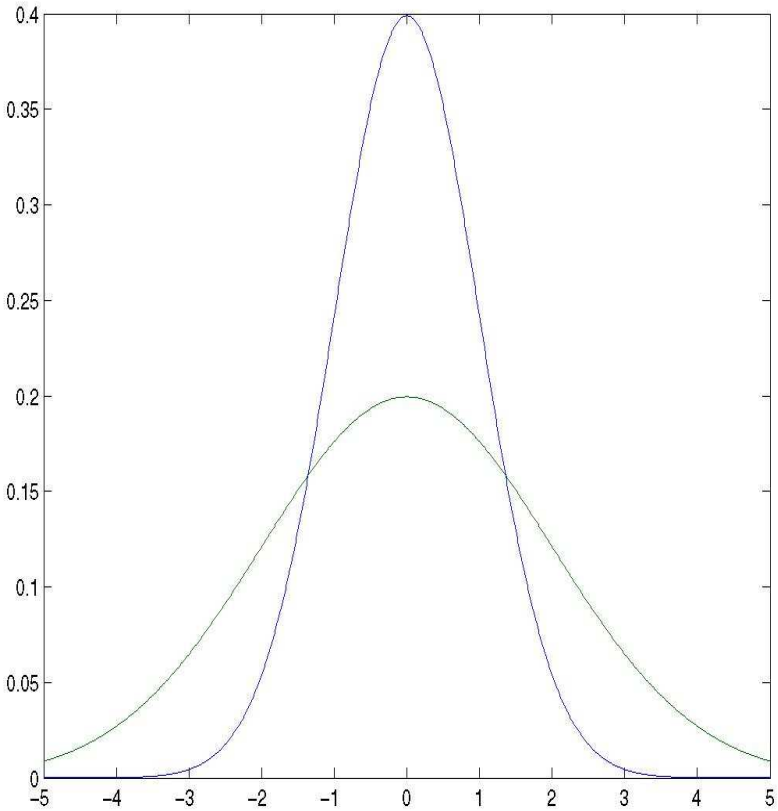
$$E(X) = \sigma E(Z) + \mu = 0 + \mu = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2 V(Z) + 0 = \sigma^2.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Täthetsfunktionerna för $N(0,1)$ och $N(1,1)$ och $N(0,1)$ och $N(0,2)$ (från vänster till höger)





Allmän normalfördelning

Sats

Låt X vara $N(\mu,\sigma)$-fördelad och sätt $Y = aX + b$. Då gäller det att

$$Y \text{ är } N(a\mu + b, |a|\sigma)\text{-fördelad.}$$

Bevis. Från definitionen följer att $X = \mu + \sigma Z$ där Z är $N(0,1)$-fördelad. Detta ger

$$Y = aX + b = a(\mu + \sigma Z) + b = a\mu + b + a\sigma Z$$

$$\frac{Y - (a\mu + b)}{a\sigma} = Z.$$

Om $a > 0$ följer satsen. Om $a < 0$ utnyttjar vi att Z och $-Z$ har samma fördelning.

KTH Matematik

Summan av oberoende normalfördelade variabler

Sats

Om X är $N(\mu_X, \sigma_X)$-fördelad, Y är $N(\mu_Y, \sigma_Y)$-fördelad och X och Y är oberoende så gäller att

$$X + Y \text{ är } N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \text{-fördelad}$$

och

$$X - Y \text{ är } N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \text{-fördelad.}$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Repetition om väntevärden

Återkalla i minnet att Låt X och Y vara två oberoende (okorrelerade räcker) s.v. Då gäller

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$
$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) \quad V(X-Y) = V(X) + V(Y).$$

Det nya är att vi kan ge fördelningen för summan av oberoende normalfördelade variabler

KTH Matematik

Summan av oberoende normalfördelade variabler

Sats

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende och $N(\mu_1, \sigma_1), \ldots, N(\mu_n, \sigma_n)$. Då gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} c_k X_k \text{ är } N\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mu_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \sigma_k^2}\right) \text{-fördelad.}$$

Allmän regel: Linjärkombinationer av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelade med rätt väntevärde och rätt standardavvikelse.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

I förra föreläsningen

Sats

Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende (okorrelerade räcker) s.v. och sätt

$$Y = c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n.$$

Då gäller

$$E(Y) = c_1 E(X_1) + \ldots + c_n E(X_n)$$

och

$$V(Y) = c_1^2 V(X_1) + \ldots + c_n^2 V(X_n)$$

Det nya är att vi för linjärkombinationer av oberoende normalfördelade stokastiska variabler kan ge hela fördelningen.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Aritmetiska medelvärdet

Följdsats

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och $N(\mu, \sigma)$-fördelade s.v. Då gäller att

$$\overline{X} \text{ är } N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{-fördelad.}$$

Återkalla i minnet:

Sats

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då gäller att

$$E(\overline{X}) = \mu, \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{och} \quad D(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

KTH Matematik

Centrala gränsvärdessatsen

Vi har sett några exempel på att normalfördelningen har trevliga statistiska egenskaper. Detta skulle vi inte ha så stor glädje av, om normalfördelningen inte dessutom var vanligt förekommande. Centrala gränsvärdessatsen CGS, som är den huvudsakliga motiveringen för normalfördelningen, kan utan vidare sägas vara ett av sannolikhetsteorins och statistikens allra viktigaste resultat.

Sats

(CGS) *Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och lika fördelade s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då gäller att*

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \Phi(x) \quad \text{då } n \to \infty.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

CGS

Ofta uttrycker man slutsatsen i CGS som att

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ är approximativt } N(0,1)\text{-fördelad}$$

eller att

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ är approximativt } N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)\text{-fördelad.}$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

En, för statistiken mycket vanlig användning av CGS är följande:

Följdsats

Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och lika fördelade s.v. med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Då gäller att

$$P(a < \overline{X} \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

om n är tillräckligt stort.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

CGS

Det är tyvärr inte möjligt att ge några generella och enkla tumregler om hur stort n måste vara för att normalapproximationen ska vara användbar. Detta beror på hur "normalliknande" de enskilda variablerna X_k är. Om $X_k$na är normalfördelade så "gäller" ju CGS för alla n. En tumregel är att om $X_k$na är någorlunda symmetriskt fördelade så räcker ganska små n, säg något tiotal. Om $X_k$na är påtagligt skevt fördelade så behöver n var något eller i värsta fall några hundratal.

CGS

Det är svårt att formulera strikt, men det räcker i CGS att $X_k$na är någorlunda oberoende och någorlunda lika fördelade. Med ”någorlunda lika fördelade” menas framförallt att det inte finns vissa X_k som är mycket dominerande. Detta innebär att mätfel i välgjorda försök kan anses vara approximativt normalfördelade. I mindre välgjorda försök kan det däremot mycket väl finnas någon dominerande felkälla som inte alls behöver vara approximativt normalfördelad.

KTH Matematik

Binomialfördelningen

Antag att vi gör ett försök där en händelse A, med sannolikheten $p = P(A)$, kan inträffa. Vi upprepar försöken n gånger, där försöken är oberoende. Sätt

$X =$ antalet gånger som A inträffar i de n försöken.

Vi säger då att X är binomialfördelad med parametrarna n och p, eller kortare att X är $\mathrm{Bin}(n, p)$-fördelad.

Vi har

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ för } k = 0, \ldots, n,$$

där $q = 1 - p$.

KTH Matematik

$X \in \text{Bin}(n,p)$, $X = U_1 + \ldots + U_n$

Låt $U_1, \ldots, U_n$ vara s.v. definierade av

$$U_i = \begin{cases} 0 & \text{om } A^* \text{ inträffar i försök nummer } i, \\ 1 & \text{om } A \text{ inträffar i försök nummer } i. \end{cases}$$

Lite eftertanke ger att $U_1, \ldots, U_n$ är oberoende och att

$$X = U_1 + \ldots + U_n.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

$X \in \text{Bin}(n,p)$, $X = U_1 + \ldots + U_n$

Då

$$E(U_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

och

$$V(U_1) = E(U_i^2) - E(U_i)^2 = E(U_i) - E(U_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

så följer

$$E(X) = nE(U_i) = np \quad \text{och} \quad V(X) = nV(U_i) = npq.$$

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Bin(n,p) approximativt $N(np, \sqrt{npq})$-fördelad

Av Xs representation som en summa följer att CGS kan tillämpas.

Sats

Om X är Bin(n,p)*-fördelad med $npq \geq 10$ så är X approximativt $N(np, \sqrt{npq})$-fördelad.*

Detta innebär att

$$\left.\begin{array}{l} P(X \leq k) \\ P(X < k) \end{array}\right\} \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Med *halvkorrektion* menas att vi använder följande approximation:

$$P(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$P(X < k) \approx \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

KTH Matematik