

FORMLER FÖR BERÄKNINGAR MED SUMMATECKEN

(8) och (9) ingår i 13.3 i Formelsamlingen

Definition: (1) $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

(2) $\sum_{i=1}^n a \cdot x_i = a \sum_{i=1}^n x_i$. *Bevis:* Definitionen (1) ger $\sum_{i=1}^n a \cdot x_i = ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n = a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = a \sum_{i=1}^n x_i$.

Exempel: $x_i = 1, i = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^n a = a \sum_{i=1}^n 1 = a(1 + 1 + \dots + 1) = a \cdot n$.

(3) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$.

Bevis: Definition (1) ger $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$.

(4) $\sum_{i=1}^n (ax_i + by_i) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i$

Bevis: Detta fås av (3) och (2).

(5) $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Bevis: Använd $(x_i + y_i)^2 = x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2$ och (4) samt (2) med $a = 2$.

Låt $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Då gäller

(6) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$.

Bevis: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}$ enligt (4). Men här har vi med $a = \bar{x}$ i (2) att $\sum_{i=1}^n \bar{x} = \bar{x} \sum_{i=1}^n 1 = \bar{x} \cdot n$ enligt exemplet i (2). Men $\bar{x} \cdot n = \sum_{i=1}^n x_i$ och detta ger påståendet i (6).

(7) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})$.

Bevis: $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = (x_i - \bar{x}) \cdot y_i - (x_i - \bar{x}) \cdot \bar{y}$. Då fås enligt (4) att $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot y_i - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot \bar{y}$. Men med $a = \bar{y}$ i (2) fås att $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$ och då ger (6) att $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i$. Analogt tar vi fram den andra likheten.

- (8) $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\text{Bevis: Utveckla t.ex. } \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) \text{ i högra ledet av (7) och använd (2) och definitionen på } \bar{x}.}$

- (9) $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{\text{Bevis: Ur (5) fås att } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2. \text{ Då ger (2) med } a = \bar{x} \text{ och exemplet i (2) att } \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2. \text{ Definitionen på } \bar{x} \text{ ger } \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}, \text{ så att } \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2.}$

Låt $g(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta))^2$. Då gäller

- (10) $\frac{d}{d\theta} g(\theta) = -2\mu'(\theta) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta))$, där $\mu'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \mu(\theta)$.
Bevis: $\frac{d}{d\theta} g(\theta) = \frac{d}{d\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta))^2 = \frac{d}{d\theta} \left((x_1 - \mu(\theta))^2 + \dots + (x_n - \mu(\theta))^2 \right)$
 $= \frac{d}{d\theta} (x_1 - \mu(\theta))^2 + \dots + \frac{d}{d\theta} (x_n - \mu(\theta))^2$, ty derivatan av en summa är summan av termernas derivator. För varje enskild term i summan gäller $\frac{d}{d\theta} (x_i - \mu(\theta))^2 = 2(x_i - \mu(\theta))(-\mu'(\theta))$. Detta ger $\frac{d}{d\theta} (x_1 - \mu(\theta))^2 + \dots + \frac{d}{d\theta} (x_n - \mu(\theta))^2 = 2(x_1 - \mu(\theta))(-\mu'(\theta)) + \dots + 2(x_n - \mu(\theta))(-\mu'(\theta))$
 $= 2(-\mu'(\theta))((x_1 - \mu(\theta)) + \dots + (x_n - \mu(\theta))) = 2(-\mu'(\theta)) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta))$,
där vi utnyttjade (2) med $a = 2(-\mu'(\theta))$.

- (11) $\frac{d}{d\theta} g(\theta) = 0 \Rightarrow \mu(\theta) = \bar{x}$.
Bevis: Enligt (10) $\frac{d}{d\theta} g(\theta) = 0 \Leftrightarrow -2\mu'(\theta) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(\theta)) = 0$. Då ger (3) och (2) att $\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \mu(\theta) = 0$ och Exemplet i (2) ger $\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - n\mu(\theta) = 0$ och detta $\Rightarrow \mu(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.