Urnmodell som kortlek

Jacob Arén

31 augusti 2018

Nedan följer en beskrivning av urnmodellen illustrerad som dragningar utan återläggning ur en kortlek. Först och främst behöver man ha koll på följande storheter:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+2)(n-k+1)}{k!} \end{aligned} \tag{2}$$

Antag att vi vill veta sannolikheten för att plocka 3 kort i färgen hjärter. Låt oss börja titta på en *specifik* kombination av kort i färgen hjärter, säg

$$\heartsuit\mathrm{A}, \heartsuit 7, \heartsuit\mathrm{Q}. \tag{3}$$

Om man tänker sig att korten plockas ett i taget, så kan denna specifika kombination plockas följande sätt:

$$\begin{array}{ccccc} \heartsuit\mathrm{A}, \heartsuit 7, \heartsuit\mathrm{Q} & | & \heartsuit 7, \heartsuit\mathrm{A}, \heartsuit\mathrm{Q} & | & \heartsuit 7, \heartsuit\mathrm{Q}, \heartsuit\mathrm{A} \\ \heartsuit\mathrm{A}, \heartsuit\mathrm{Q}, \heartsuit 7 & | & \heartsuit\mathrm{Q}, \heartsuit\mathrm{A}, \heartsuit 7 & | & \heartsuit\mathrm{Q}, \heartsuit 7, \heartsuit\mathrm{A} \end{array}$$

Om alla dessa sätt att plocka den givna kortkombination ses som en enda händelse säges vi plocka korten *oberoende av ordning*. För intuitionen kan man tänka att man kan placera $\heartsuit$A på tre positioner, för var och en av dessa positioner kan $\heartsuit$7 placeras på 2 kvarvarande positioner och vid varje sådan kombination finns 1 plats kvar åt $\heartsuit$Q. Alltså kan kombinationen ordnas på

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \tag{4}$$

sätt.

Tänk dig att du har alla hjärter framför dig. På hur många sätt kan du välja en kombination av tre kort?

Första kortet kan väljas på 13 sätt, andra på 12 och tredje på 11, antal kombinationer är alltså

$$13 \cdot 12 \cdot 11 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = \frac{13!}{10!}. \tag{5}$$

Men för alla dessa specifika kombinationer kan de 3 valda korten ordnas på 3! olika sätt. Antal kombinationer totalt *utan hänsyn till ordning* ges då av

$$\begin{aligned} &\frac{\#\text{Unika sätt att välja 3 kort i färgen hjärter}}{\#\text{Sätt att ordna tre (unika) kort}} = \\ &= \left(\frac{13!}{10!}\right) \Big/ 3! = \frac{13!}{10!3!} = \binom{13}{3}. \end{aligned} \tag{6}$$

Helt analogt med antal sätt att plocka tre hjärter bland bland 13 hjärter oberoende av ordning finns det $\binom{52}{3}$ sätt att plocka 3 kort ur en kortlek med 52 kort *utan hänsyn till ordning*. Slutligen får vi att

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(\text{Dra tre kort ur en kortlek varav alla är hjärter}) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \\ &= \frac{\left(\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{\cancel{3!}}\right)}{\left(\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{\cancel{3!}}\right)} = \frac{\cancel{13} \cdot (\cancel{4} \cdot \cancel{3}) \cdot 11}{(\cancel{13} \cdot \cancel{4}) \cdot (17 \cdot \cancel{3}) \cdot 50} = \frac{11}{17 \cdot 50} = \frac{11}{850} \approx 1.29\%. \end{aligned} \tag{7}$$

Så vad har det här med urnan att göra? Kortexemplet kan generaliseras till ett allmänt fall med urnan enligt tabellen nedan:

Kortlek		**Urna**	
Beskrivning	Antal	Beskrivning	Antal
Hjärter	13	Vita kulor	v
Inte hjärter	39	Svarta kulor	s
Kort i leken	52	Kulor i urnan	$s+v$
Dragningar ur lek	3	Dragningar ur urna	k

Analogt med kortexemplet ges för en urna med v vita och s svarta kulor

$$\mathcal{P}(\text{ Dra } k \text{ kulor varav alla vita }) = \frac{\binom{v}{k}}{\binom{s+v}{k}}. \tag{8}$$