

SF1901: SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK FÖRELÄSNING 12 HYPOTESPRÖVNING.

Tatjana Pavlenko

2 oktober 2017



PLAN FÖR DAGENS FÖRELÄSNING

- ▶ Intervallskattning med normalfördelade data: två stickprov (rep.)
- ▶ Intervallskattning med normalapproximation (Kap. 12.4)
- ▶ Begrepp inom hypotesprövning (Kap. 13.2-13.3).
- ▶ Testvariabel- och direktmetoden.
- ▶ Tillämpning på normalfördelning (Kap. 13.6).



INTERVALLSKATTNING MED NORMALFÖRDELADE DATA: TVÅ STICKPROV (REP.)

Under förra föreläsning fick vi konfidensintervall för två typ av situationer med två stickprov.

- ▶ *Two independent samples:* $I_{\mu_1 - \mu_2}$ dvs intervall för differensen mellan två väntevärdena hos två normalfördelningar $N(\mu_1, \sigma_1)$ och $N(\mu_2, \sigma_2)$ i fallen då
 1. σ_1 och σ_2 var kända
 2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ och okänd.
- ▶ *Stickprov i par:* I_{Δ} , dvs intervall för systematisk skillnad Δ baserat på differenser $z_i = x_i - y_i$, där x_i och y_i är oberoende observationer från $N(\mu, \sigma_1)$ respektive $N(\mu + \Delta, \sigma_2)$. Här kan standardavvikelseerna σ_1 och σ_2 vara olika.



- ▶ T ex för fall 2 får vi:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in t(n_1 + n_2 - 2),$$

Från formelsamling: 11.2 (a)+11.2 (d)+12.2 (t-metoden)

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm t_{/2}(k)d),$$

med $d = s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$ och $k = n_1 + n_2 - 2$.

- ▶ Vi studerar n st objekt och på varje objekt gör mättningar *före* och *efter* ... Detta ger data
 - ▶ $x_1, \dots, x_n$ som är obesrvationer av $X_i \in N(\mu_i, \sigma_1)$, ober. och
 - ▶ $y_1, \dots, y_n$ som är obesrvationer av $Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$, ober., $i = 1, \dots, n$.
 - ▶ Vi tolkar Δ som förändringen.
- ▶ Vi bygger $z_i = y_i - x_i$ som betraktas som observationer av $Z_i = Y_i - X_i \in N(\Delta, \sigma_z)$ med $\sigma_z = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Vidare
 - ▶ $\bar{Z} \in N(\Delta, \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}})$ om σ_z är känd, (formls. 11.1 (a))
 - ▶ $\frac{\bar{Z} - \Delta}{s_z / \sqrt{n}} \in t(n-1)$ om σ_z är okänd, (formls. 11.1 (d))
- ▶ Från formelsamling, med 11.1 (a)+11.1 (d)+12.2 (t -metoden) får vi ett konfidensintervall med konf. grad $1 - \alpha$

$$I_\Delta = (\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(n-1)d),$$

där $d = s_z / \sqrt{n}$.



INTERVALLSKATTNING MED NORMALAPPROXIMATION.

- ▶ Idé: Vi har hittills studerat olika situationer där observationerna, och därmed även skattarre, är *exakt* normalfördelade.
- ▶ Men även om vi inte har stickprov från en normalfördelning, det mycket väll på grund av Centrala gränsvärdessatsen, kan vara så att vår skattare är *approximativt* normalfördelad.
- ▶ Vi kan i så fall tillämpa normalfördelningsteori, men istället för att få exakt konfidensgrad $1 - \alpha$ så får vi nöja oss med att att konfidensgrad blir *approximativt* $1 - \alpha$.



INTERVALLSKATTNING MED NORMALAPPROXIMATION (FORT.).

- ▶ Låt $x_1, \dots, x_n$ vara ett stickprov från någon s.v. X med någon fördelning som beror på okänd parameter θ .
- ▶ Låt θ^* vara en punktskattare av θ sådan att

$$\theta^* \in AsN(\theta, D).$$

- ▶ Om D är känd så får vi, på analogt sätt med λ -metoden konfidensintervall för θ

$$I_\theta = (\theta_{obs}^* \pm \lambda_{\alpha/2} D).$$

- ▶ Oftast D är okänd och vi skattar den som tidigare med medelfelet d , vilket innebär en ytterliggare approximation, men intervallet

$$I_\theta = (\theta_{obs}^* \pm \lambda_{\alpha/2} d)$$

är fortfarande ett konfidensintervall med *approximativ konfidensgrad* $1 - \alpha$.



INTERVALLSKATTNING MED NORMALAPPROXIMATION (FORT.).

- ▶ Exempel (på tavlan): En tillverkare säljer komponenter i förpackningar med 50 komponenter i varje. Komponenterna är defekta med sannolikhet p oberoende av varandra. En kund köper en förpackning och konstaterar att 15 komponenter var defekta (de övriga 35 var hela). Gör ett tvåsidigt 95% approximativt konfidensintervall för p .
- ▶ Svar: $(0.17, 0.43)$.



- ▶ Då man konstruerar konfidenintervall vill man dra slutsatser om okända parametrar från data. Detta kan också kallas för *signifikans test* eller *hypotesprövning*.
- ▶ Vi börjar med
- ▶ Exempel: *Skicklig slantslingning*.

En person (se bild på nästa sida) påstår sig vara tillräckligt fingerfärdig för att kunna påverka vilken sida som kommer upp vid slantslingning, så att han får krona oftare än klave, dvs med $p = P(\text{krona}) > 1/2$.

- ▶ Hur skulle kunna ett statistiskt experiment och analys gå till?
- ▶ Vi är skeptiska mot hans påstående och vi är beredda att tro honom (dvs *förkasta hypotesen att $p = 1/2$ om han får tillräckligt många krona*).

SKICKLIG SLANTSLINGNING?



FIGUR: Personen som inspirerade exempel ovan en amerikanske statistik professorn Persi Diaconis, som före statistikkarriären livnärde sig som magiker. Han har bl. a. gjort ingående studier av slantslingning.

Läs mer om Persi Diaconis här

- ▶ <https://www.quantamagazine.org/20150414-for-persi-diaconis-next-magic-trick/>
- ▶ <https://PersiDiaconis.pdf>



SKICKLIG SLANTSLINGNING? (FORTS.)

- För att testa påståendet får personen göra 10 kast. Låt x vara antalet krona vid försöket. Vårt test bör då vara av typen:

Förkasta hypotesen att $p = 1/2$ om $x \geq C$

för ett lämpligt vall av konstanten C . Vi vill välja C så att risken att vi av misstag förkastar hypotesen $p = 1/2$ blir liten.

- Vi noterar att x är en observation av en s.v. $X \in \text{Bin}(10, p)$. Vi behöver alltså studera $P(X \geq C)$ då $p = 1/2$ för olika värden på konstanten C .



SKICKLIG SLANTSLINGNING? (FORTS.)

- ▶ $C = 10$ ger

$$P(X \geq C) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0.000098.$$

- ▶ $C = 9$ ger

$$P(X \geq C) = \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{11}{1024} \approx 0.011.$$

- ▶ $C = 8$ ger

$$P(X \geq C) = \left(\binom{10}{10} + \binom{10}{9} + \binom{10}{8} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{56}{1024} \approx 0.055.$$

- ▶ Om vi vill hålla felrisken liten (t ex. ≤ 0.05) verkar $C = 9$ vara ett rimligt val. Beslutsregel blir då att

förkasta hypotesen att $p = 1/2$ om antalet krona är minst nio
och felrisken blir 1.1%.



- ▶ Vi betraktar den allmänna situationen: vi har ett stickprov $x = (x_1, \dots, x_n)$ som är utfall av s. v. $(X_1, \dots, X_n)$ från någon fördelning $F_X(x; \theta)$.
- ▶ Vi vill testa en grundhypotes, eller *nollhypotes*, om θ : $H_0 : \theta = \theta_0$ mot en *alternativ hypotes*, H_1 , som kan vara *enkel*, $H_1 : \theta = \theta_1$, eller *sammansatt*, t ex $H_1 : \theta > \theta_0$. En hypotes av typ $H_1 : \theta > \theta_0$ eller $H_1 : \theta < \theta_0$ är *ensidig*, medan $H_1 : \theta \neq \theta_0$ är *tvåsidig*.
- ▶ För att testa H_0 definierar vi först en *test variabel* eller *teststorhet*, $t_{obs} = t(x)$ som är en observation av motsvarande stickprovsvariabel $t(X)$. Vi kommer också att behöva testets signifikansnivån eller felrisk.
- ▶ **Def:** Med *signifikansnivån*, eller *felrisken*, α för ett test menas

$$\alpha = P(H_0 \text{ förkastas}) \quad \text{om } H_0 \text{ är sann.}$$

- ▶ Testet utformas på så sätt att felrisken blir liten. Vanliga nivåer är $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.001$. Jämför med felrisker vid konfidensintervall konstruktion!



- ▶ Hitta en teststorhet $t(X)$ och till den ett *kritiskt område* C .
- ▶ Testet blir då:

$$\text{Om } \begin{cases} t_{obs.} \in C, & \text{förkasta } H_0 \\ t_{obs.} \notin C, & \text{ej förkasta } H_0, \end{cases}$$

där det kritiska området C anpassas så att

$$P(H_0 \text{ förkastas}) = P(t(X) \in C) = \alpha \quad H_0 \text{ är sann}$$

och α är testets signifikansnivå som väljs på förhans.

- ▶ Tolkning:
Om H_0 förkastas så föreligger det ett signifikant avvikelse från nollhypotesen H_0 på nivån α .

EXEMPEL: SKICKLIG SLANTSLINGNING? (FORTS.)

- ▶ Låt i detta fall $x = 7$ (dvs personen fick krona 7 ggr ut av 10 kast), x är en observation av $X \in \text{Bin}(10, p)$.
- ▶ Vi låter nollhypotesen vara

$$H_0 : p = p_0 = 1/2,$$

dvs vi är skeptiska mot pesonens påstående att kunna påverka vilken sida som kommer upp vid slantsingling och tror att $p = 1/2$.
Mothypotesen är

$$H_1 : p > p_0,$$

dvs personen kan påverka resultatet.

- ▶ Testet utförs på signifikansnivån $\alpha = 0.01$.



EXEMPEL: SKICKLIG SLANTSLINGNING? (FORTS.)

- ▶ Vi har i detta fall en enda observation så att $t_{obs} = t(x) = x$.
- ▶ C ska väljas så att följande uppfylls:

$$P(H_0 \text{ förkastas}) = P(T(X) \in C) = P(X \in C) = \alpha, \text{ om } H_0 \text{ är sann,}$$

och vi väljer $C = [x_\alpha, 10]$ där x_α är 0.01-kvantilen för $\text{Bin}(10, 0.5)$ -fördelningen. Om ett utfall x hamnar i kritisk område C så förkastas H_0 till förmån för H_1 , dvs vi tror på att p är större än $1/2$.

- ▶ Med hjälp av MATLAB får man $x_{0.01}$ -kvantilen enligt

```
>> binoinv(0.99,10,0.5)
ans =
9
```
- ▶ Slutsats: Då personen fick 7, och $x = 7 \notin C = [9, 10]$ så kan vi ej förkasta H_0 att $p = 1/2$.



EXEMPEL: TEST AV ASTROLOG.

- ▶ Detta exempel är baserat på ett verkligt fall. I Lund framlades en psykologuppsats (motsv exjobb) som påstås att *horoskop ger information om personligheten*. En astrolog påstår att han kan utläsa en persons framtid från utseendet på stjärnhimlen då personen föds.
- ▶ Astronomen från Chalmers, Curt Roslund organiserade ett experiment där 15 dömda mördare och 15 sekreterare väljs ut och astrologen får tillgång till bilder av stjärnhimlen då de 30 personerna föddes. Uppgiften bestod i att peka ut så många mördare som möjligt.
- ▶ Hur skulle en statistisk analys av experimentet gå till? Syftet är att konstruera ett test för att pröva hypotesen

H_0 : astrologen bara gissar

H_1 : det inte är så att han bara gissar.

- ▶ Vid experimentet lyckades astrologen utpeka rätt 9 mördare. Kan H_0 förkastas? På tavla i mån av tid med *Direktmetoden*, se nästa slide. (Svar: H_0 kan ej förkastas).



DIREKTMETODEN.

- ▶ Ett alternativ till testvariabel metoden.
- ▶ Metodens idé med hjälp av exempel *Skicklig slantslingning* (på tavlan).
- ▶ Allmänt: Det *direkta* med direktmetoden är att vi räknar ut ett storhet som direkt kan jämföras med felrisken! Metoden går till på följande sätt:
 1. Antag att H_0 är sann (dvs att det parametervärde den specificerar är det rätta värde).
 2. Räkna under H_0 ut
$$p\text{-värdet} = P(\text{teststorhet blir minst lika extremt som observerat}).$$
 3. Om p -värde är mindre än α (ofta $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$) så förkastas H_0 med felrisk α .
- ▶ Tolkning: Om p -värde är litet (ofta $<$ än $0.05, 0.01$ eller 0.001) så tror vi inte på H_0 . p -värde ger alltså ett mått på *hur orimlig* H_0 är.



NÄSTA FÖRELÄSNING.

- ▶ Konfidensmetoden: hur kan man utföra test med konfidensintervall?
- ▶ Tillämpning på normalfördelning: två stickprov.
- ▶ Styrkefunktion
- ▶ Normalapproximation.

