SF1914/SF1916: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 3
Diskreta stokastiska variabler

Tatjana Pavlenko

31 augusti, 2018

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Repetition av *betingade sannolikheter*, användbara satser samt begreppet *oberoende händelser*.
- Stokastiska variabler (s.v) (kap. 3.2)
- Diskret stokastisk variabel (Kap. 3.3–3.4)
- Exempel på diskreta fördelningarna.
- Funktioner av diskreta s.v. Väntevärde och varians av diskreta s. v.

- Definition. Låt A och B vara två händelser, $P(B) > 0$. Uttrycket
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
kallas *den betingade sannolikheten för A givet att B hat inträffat*.

- *Sats*: Lagen om total sannolikhet.

  Betrakta händelserna $H_1, \ldots, H_n$ som är parvis oförenliga och $\cup_{i=1}^{n} = \Omega$. Då gäller för varje händelse A att
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A|H_i\right) P\left(H_i\right).$$

KTH Matematik

- Ibland är man intresserad av sannolikheten för en viss händelse betingat av en annan händelse, när man känner till den omvända betingade sannolikheten och de obetingade sannolikheterna. Då används Bayes' formel.
- *Sats*: Bayes' Sats.

  Under samma villkor som i lagen om total sannolikhet gäller att

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)P(H_j)} \quad \text{för} \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Exempel.

- Om händelsen B *inte påverkar* sannolikheten för att A inträffar så får vi $P(A|B) = P(A)$ och/eller $P(B|A) = P(B)$. Uttryckt med hjälp av def. av betingade sannolikheter

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Detta leder till definition: Om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

sägs A och B vara oberoende.

- När slumpförsök ger upphov till numeriska resultat (antal eller kontinuerliga värde) som bestäms av utfallet av försöket, alltså av slumpen, talar man on *slumpvariabler*, eller *stokastiska variabler*. Det är praktiskt att definiera begreppet.
- Def: En stokastisk variabel, $X(\omega)$ är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum, dvs $X : \Omega \to R^1$. Stokastiska variabler betecknas med $X, Y, \ldots$.
  - Ex 1: I marknadsundersökning i ett köpcentrum vill man tillfråga förbipasserande som har småbarn. Antalet individer som passerar innan första småbarnsföräldern kommer kan betraktas som en *diskret* stokastisk variabel.
  - Ex 2: Livslängd hos en elektrisk komponent kan betraktas som en *kontinuerlig* stokastisk variabel.

Diskreta stokastiska variabler

- Def: En stokastisk variabel, $X(\omega)$ är diskret om den endast kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden $\{k_1, k_2, \ldots\}$, (syftar på heltal).
- Def: Funktionen

$$p_X(k) = P(X \text{"antar värdet"} \ k) = P(X = k), \ k = k_1, k_2, \ldots$$

kallas för sannolikhetsfunktionen för en diskret s.v. X.

- Sannolikhetsfunktionen beskriver fördelningen av sannolikhetsmassan över observationsvärdena.
- I de allra flesta fall är observationsvärdena k för en s.v. X icke-negativa heltalsvärdena eller naturliga talen, dvs $k = 0, 1, 2, \ldots$ eller $k = 1, 2, \ldots$.
- Ex på tavla

KTH Matematik

- Villkor:
  - $0 \leq p_X(k) \leq 1$ för alla k
  - $\sum_{\text{alla } k} p_X(k) = 1$
- Med hjälp av $p_X(k)$ har vi:
  - $P(a \leq X \leq b) = \sum_{k: a \leq k \leq b} p_X(k)$
  - $P(X \leq a) = \sum_{k: k \leq a} p_X(k)$
  - $P(X > a) = \sum_{k: k > a} p_X(k) = 1 - \sum_{k: k \leq a} p_X(k) = 1 - P(X \leq a)$

- *Likformig fördelning.* Def: Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \frac{1}{m}, \quad k = 1, 2, \ldots m,$$

sägs X vara likformigt fördelad.

  - Ex: Tärningskast.

- *Tvåpunktsfödelning. Bernoulli fördelning.* Def: Om en s.v. X antar endast två värden a och b med sannolikheter p och $1-p$, sägs X vara tvåpunktsfördelad. Alltså

$$p_X(a) = p, \quad p_X(b) = 1-p.$$

- Om speciellt $a = 1$ och $b = 0$ kallas X en Bernoulli-fördelad s.v. Beteckning: $X \in Be(p)$.

- Förekomst:
  - Detta är modell för experiment där man gör ett försök som som antingen *lyckas* $(X = 1)$ eller *misslyckas* $(X = 0)$.

- *För-första-gången fördelning.* Def: Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

där $0 < p < 1$ sägs X vara för-första-gången fördelad.
Beteckning: $X \in ffg(p)$.

- Förekomst:
  - Betrakta ett försök som kan utfalla på två sätt, lyckat eller misslyckat. Sannolikhet för lyckat är $0 < p < 1$ och resultaten av försöken är oberoende. Försöket upprepas tills det för första gången lyckas.
  - Låt X vara antalet försök som erfordras. Vi säger att X har för-första-gångens fördelning, dvs $X \in ffg(p)$.
- Ex: Upprepade tärningskast t.o.m första 6:an, på tavlan.

- *Binomialfördelning.* Def: Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

där $0 < p < 1$, sägs X vara binomialfördelad. Beteckning: $X \in Bin(n, p)$.

- Förekomst:
  - Betrakta ett försök som utförs på *förhand bestämt antal gånger* n. Försöken antas vara oberoende, och varje försök kan lyckas (med slh p) eller misslyckas. Låt s.v. X vara antalet lyckade försök av dessa n. Man är intresserad att finna $P(X = k)$, dvs sannolikheten för att antalet lyckade försök är k. Då är $X \in Bin(n, p)$ och sannolikheterna $P(X = k)$ ges av $p_x(k)$.
- Ex. Ant. 6:or i 20 oberoende tärningskast, på tavlan.

Binomialfördelning, forts. Exempel av $Bin(n, p)$.

- Antag att i genomsnitt var tionde bil som passerar förbi Rialaavfarten på E18 kör för fort och att olika bilar håller oberoende hastigheter (dvs vi antar t ex att det inte finns köbildningar). En polis mäter hastigheten på 15 bilar.

  a) Vad är sannolikheten att exakt 3 bilar kör för fort?
  (Svar: 0.1285)

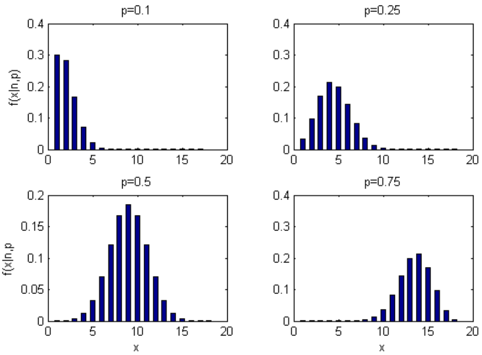
  b) Vad är sannolikheten att *minst* 3 bilar kör för fort?
  (Svar: 0.1841)

Med MATLAB:

a)

```
> binopdf(3,15,0.1)
ans =
0.1285
```

BINOMIALFÖRDELNING (FORTS.)



FIGUR: Sannolikhetsfunktion $p_x(k)$ uppritad för fyra olika binomialfördelningar: $n = 20$ med $p = 0.1$, $p = 0.25$, $p = 0.5$ respektive $p = 0.75$. Som synes sker en förskjutning åt större värden ju större p blir.

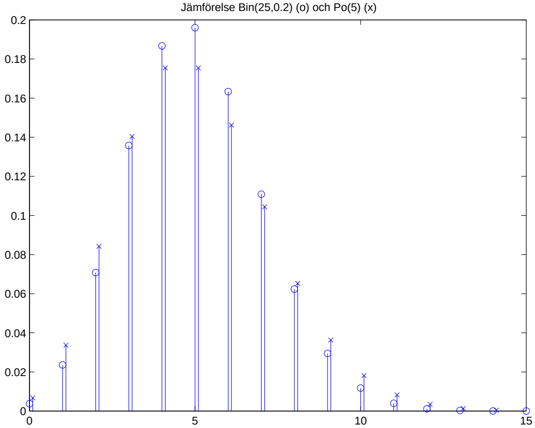
- *Poisson-fördelning*. Def: Om en s.v. X har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

där $\mu > 0$ sägs X vara Poissonfördelad. Beteckning: $X \in Po(\mu)$.

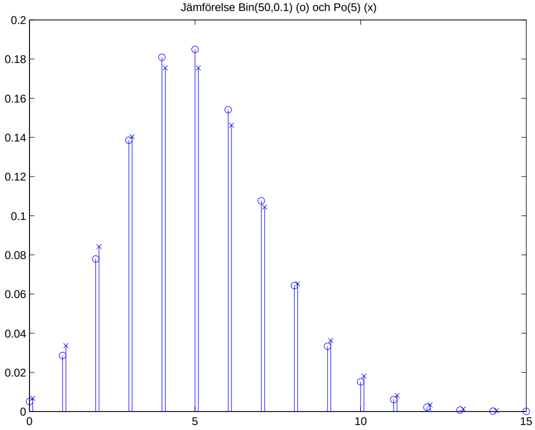
- Förekomst:
  - Används för att modellera *sällsynta händelser.* Antag att $X \in Bin(n, p)$ där ant. oberoende försök n är stort och sannolikheten p att lyckas i varje försök är liten. Betrakta $\mu = np$ som är "lagom". Då ges antalet lyckade försök approximativt av en s.v. som är Poissonfördelad med $\mu = np$. Detta kallas ibland *små talens lag*. Approximationen är rimlig om $p < 0.1$ och $n > 10$.

POISSON-APPROXIMATION



FIGUR: Sannolikhetsfunktion för binomial- och Poisson fördelningar

POISSON-APPROXIMATION



FIGUR: Sannolikhetsfunktion för binomial- och Poisson fördelningar

Väntevärde och varians för diskreta s.v.

Man vill ofta kunna sammanfatta den statistiska informationen i sannolikhetsfördelnig med hjälp av ett par tal, *lägesmått* och *spridningsmått*. Detta kan göras på olika sätt. Det vanligaste lägesmått är *väntevärde*.

- Def: Väntevärde för en diskret s.v. X definieras av

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\text{alla } k} k p_X(k).$$

- *Den mekaniska tolkningen:* med hjälp av väntevärde för en s. v. kan tyngdpunkten hos massfördelningen på x-axeln sammanfattas i ett enda värde. Väntevärde är därför ett lägesmått som anger *var massan ligger i genomsnitt.*

Väntevärde och varians (forts.)

I senare avsnitt kommer vi att studera funktioner av stokastiska variabler och då även intressera oss för väntevärden av dessa.

- Sats (5.1, kap. 5.2): Låt X vara en s.v., $g(\cdot)$ är en reellvärd funktion och låt s.v. Y vara definierad av $Y = g(X)$. Då gäller att

$$E(Y) = \sum_{alla\ k} g(k) p_X(k).$$

- Ex på tavla

KTH Matematik

Väntevärde och varians (forts.)

De vanligaste spridningsmått är *varians* och *standardavvikelse*.

- Def: Antag att en diskret s.v X har väntevärde $E(X) = \mu$. Då definieras variansen för X som

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{\text{alla } k} (k-\mu)^2 p_X(k).$$

- Obs! Det följer av Sats 5.1.
- *Den mekaniska tolkningen:* Variansen motsvaras i mekanik av tröghetsmomentet kring tyngdpunkten.
- Def: Standardavvikelsen $D(X)$ för en s.v. X är kvadratroten ur variansen,

$$D(X) = \sqrt{V(X)}.$$

- Ex på tavla