SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 6
Mer on väntevärde och varians. Kovarians och korrelation. Stora talens lag.

Tatjana Pavlenko

10 september 2018

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Repetition av begrepp oberoende s.v. (Kap. 4.5)
- Repetition av begrepp väntevärde och varians för diskreta och kontinuerliga s. v. Flerdimensionella s.v. (Kap. 5.1-5.2)
- Väntevärde för en funktion av flerdimensionell s.v. (Kap. 5.3, (c))
- Beroendemått: Kovarians och korrelation (Kap. 5.4, (c))
- Summa och linjärkombination: väntevärde och varians. (Kap. 5.5)
- Stora talens lag (Kap. 5.6)

KTH Matematik

Oberoende s.v. (rep.)

- Betrakta en tvådimenionell s.v. (X, Y) Intuitivt: man kan anse att X och Y är oberoende om *händelserna* $\{X \in A\}$ och $\{Y \in B\}$ är oberoende för alla mängder A och B. Detta leder oss till följande
- Def: De s.v. X och Y kallas *oberoende* om

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

för alla mängder A och B.

- Sats: De s.v X och Y är oberoende om och endast om

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y,$$

eller

$$p_{X,Y}(j, k) = p_X(j)p_Y(k) \quad \text{för alla } j \text{ och } k, \text{ för diskreta s.v.}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{för alla } x \text{ och } y, \text{ för kontinuerliga s.v.}$$

KTH Matematik

Fördelning för max och min (rep.)

- Sats: Låt X_1 och X_2 vara oberoende s.v. med fördelningsfunktioner $F_{X_1}(x)$ respektive $F_{X_2}(x)$. Definiera $U = \min(X_1, X_2)$ och $V = \max(X_1, X_2)$. Då gäller att

$$F_U(u) = 1 - (1 - F_{X_1}(u))(1 - F_{X_2}(u)),$$

$$F_V(v) = F_{X_1}(v)F_{X_2}(v).$$

- Sats kan vidare utvidgas för fler än två s.v.: Om $X_1, \dots, X_n$ är

  oberoende och *lika fördelade med fördelningsfunktion* $F_X(x)$ så har $Y = \min_{i=1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)$ och $Z = \max_{i=1,\dots,n}(X_1, \dots, X_n)$ fördelningsfunktionerna

$$F_Y(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n \text{ respektive } F_Z(z) = (F_X(z))^n.$$

- Bevis och exempel på tavlan.

Fördelning för max och min (rep.)

- Exempel: *Motor*. En motor upphör helt att fungera när *samtliga* 4 cylindrar gått sönder. Antag att cylindrarnas livslängder X_i, $i = 1, \ldots, 4$ (i år) är oberoende och likafördelade $Exp(\lambda)$ där $\lambda = 1/7$, dvs $E(X_i) = 7$. Låt en s.v. T vara tid tills motorn helt upphör att fungera, då är $T = \max(X_1, \ldots, X_4)$. Fördelningsfunktion för de enskilda cylindrarna är $F_{X_i}(x) = 1 - e^{-x/7}$ (samma för alla i), vilket ger

$$F_T(t) = F_{X_i}^4(t) = \left(1 - e^{-t/7}\right)^4.$$

- Om vi i stället är intresserade av tiden S då motor funktion blir nedsatt pga *någon* cylinder inte fungerar så får vi $S = \min(X_1, \ldots, X_4)$ och fördelningsfunktionen för S blir

$$F_S(s) = 1 - (1 - F_{X_i}(s))^4 = 1 - (e^{-s/7})^4 = 1 - e^{-4s/7}.$$

- Minsta av n st. oberoende lika förd. s.v. med $Exp(\lambda)$ också är *Exp*-fördelad men $Exp(n\lambda)$!

Väntevärde för en funktion av flerdimensionell s.v.

- Väntevärde och varians: räkneregler (repetition på tavlan).
- Sats 5.1 från kap. 5.2 om väntevärde för en funktion av en s.v. kan utvidgas till en funktion av flera s.v.
- Sats: Låt (X, Y) vara en tvådimensionell s.v. och $g(X, Y)$ en reel finktion. Då gäller att

$$E\left(g(X,Y)\right) = \begin{cases} \sum_j \sum_k g(j,k) p_{X,Y}(j,k) & \text{eller} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) & \end{cases}$$

  om (X, Y) är diskret respektive kontinuerlig.
- Intressanta fall är t ex

$$g(X,Y) = X + Y,\ g(X,Y) = X \text{ samt } g(X,Y) = XY.$$

Väntevärde för en funktion av flerdimensionell s.v. (forts.)

- Sats (väntevärde av en summa): För godtyckliga s.v X och Y gäller att

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= E(X) + E(Y).$$

- Det diskreta fallet är helt analogt.
- $g(X,Y) = x$ (respektive $g(X,Y) = y$). Det gäller att

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy,$$

dvs man kan beräkna $E(X)$ och $E(Y)$ *utan* att först härleda de marginella fördelningarna!

- Sats (5.3) (Linjäritet av väntevärde): Om X och Y är s.v. med väntevärde $E(X)$ och $E(Y)$ och a, b, c är konstanter så gäller att

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$$

- Obs! Satsen är helt generellt dvs gäller vid *godtyckliga beroende mellan X och Y*.
- Sats (5.4): Om X och Y är oberoende s.v. så gäller att

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Detta utvidgas till fller än två oberoende s.v. $X_1, \ldots, X_n$, se Sats 5.5

$$E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n).$$

BEROENDEMÅTT

- När man behandlar tvådimensionella s.v är det viktigt att veta hur de två variablerna påverkar varandra, man brukar tala om *beroenden* mellan variabler. Hur beroende två s.v. X och Y är kan kvantifieras på olika sätt.
- Vi inför två närbesläktade beroendemått som beskriver graden av *linjärt* beroende/samband.
- Betrakta en tvådimensionell s.v. (X, Y) med ändliga väntevärden μ_X och μ_Y och stdavvikelser $D(X) = \sigma_X$ och $D(Y) = \sigma_Y$.

- Def: *Kovariansen mellan X och Y*, betecknad med $C(X, Y)$, definieras som

$$C(X, Y) = E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right).$$

- Tolkning av $C(X, Y)$. Samband mellan X och Y's variation. Exempel på tavlan.
- Räkneregler för kovarianser: X, Y, Z är s.v., a, b, c, d konstanter.

$$C(X, X) = V(X), \quad C(X, Y) = C(Y, X),$$

$$C(aX + b, cY + d) = acC(X, Y),$$

$$C(X + Y, Z) = C(X, Z) + C(Y, Z).$$

- Allmänt: Kovariansen är bilinjär (dvs linjär i både argument).

$$C\left(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j C(X_i, Y_j).$$

KTH Matematik

- Def: Korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$ definieras som

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{C(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Korrelationskoefficienten $\rho(X, Y)$ för en tvådimensionell s.v. är *dimensionslös* och satisfierar

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

- Stas (5.8), beräkning a kovarians: Följande samband gäller

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

- Sats: Om X och Y är oberoende så är de också okorrelerade.
  Bevis:

$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ för ober.} \, X, Y \Rightarrow C(X, Y) = 0.$$

- Omvändningen till satsen gäller inte! Okorrelerade s.v är inte nödvändigtvis oberoende. Exempel på tavlan.

- Kovariansen är viktig för att förstå variation i *summor* av s.v.

Linjärkombination

- Kovariansen är viktig för att förstå *variation* i summor av s.v.
- Sats 5.3 kan utvidgas till fler än två s.v. Låt oss se på linjärkombination

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots a_n X_n + b$$

av n s.v. $X_1, \ldots, X_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ är konstanterna.

- Sats (5.11): För *alla* $X_1, \ldots, X_n$ gäller

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b,$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} a_j a_k C(X_j, X_k).$$

- Ex på tavla!

KTH Matematik

Linjärkombination (forts.)

- Följdsats (5.11.1): För *oberoende* $X_1, \ldots, X_n$ gäller

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b,$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i).$$

- Följdsats (5.11.3): Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende s.v, var och en med väntevärdet μ och std σ, och

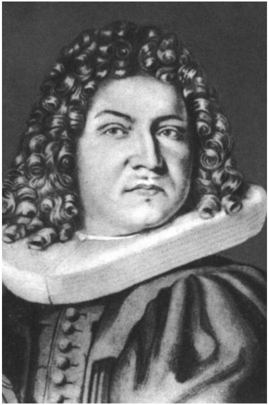
$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} (X_1 + \ldots X_n)/n$$

är deras aritmetiska medelvärde, så gäller att

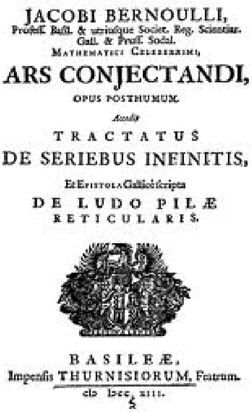
$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \sigma^2/n, \quad D(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}.$$

Stora talens lag.

- Stora talens lag är ett av de viktigaste resultaten inom sannolikhetsteorin.
- Denna lag, först formulerad av den schweiziske matematikern Jacob Bernoulli (1654–1705), utsäger att *aritmetiska medelvärdet av flera oberoende s.v. med samma väntevärde* μ *ligger nära* μ, bara antalet är tillräckligt stort.



STORA TALENS LAG (FORTS.)

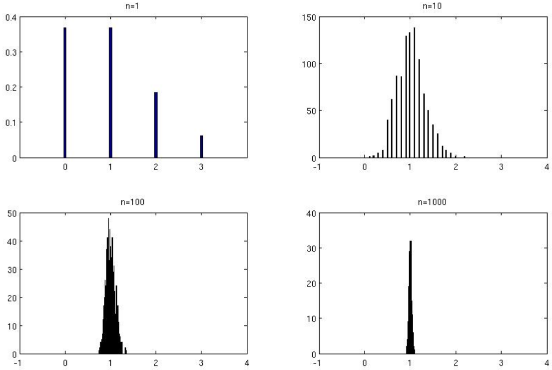

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
ctɔ Iɔcc xiii.

FIGUR: Jacob Bernoulli grundlade sannolikhetsläran med den postumt utgivna *Ars Conjectandi (Konsten att gissa* (1713)) där de stora talens lag presenteras för första gången.

- Sats: Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av oberoende (likafördelade) s.v., alla med samma väntevärde $E(X_i) = \mu$ och std $D(X_i) = \sigma < \infty$. Låt
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots X_n)$$
vara medelvärdet av de n första variablerna. Då gäller, för godtyckligt $\varepsilon > 0$, att
$$P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) \to 0 \,\text{då}\, n \to \infty.$$

- Detta säger att s.v $\bar{X}_n$, bestående av medelvärdet av de n s.v. $X_1, \ldots, X_n$ har en fördelning som koncentrerar sig runt $\mu = E(X_i)$.

Stora talens lag (forts.)



Figur: Fördelningen för medelvärdet $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots X_n)/n$, där de enskilda observationerna är $Po(1)$, för $n = 1, 10, 100$ och 1000. Den diskreta fördelningen koncentreras alltmer runt värdet 1, dvs väntevärdet.

Stora talens lag (forts.)

- *Tolkning:* medelvärde är en bra uppskattning av väntevärde!
- *Stora talens lag är en av grundstenarna inom empirisk vetenskap.* Om man gör många oberoende observationer av någon s.v., t ex hållfastheten hos en metall, blodtrycket hos patienter behandlade med en ny medicin, eller livslängden hos personer i ett försäkringskollektiv. Då kommer medelvärdena av dessa observationer att ligga nära det *sanna* väntevärdet.
- *Om vi inte vet det sanna väntevärdet kan vi gissa, eller skatta väntevärdet med medelvärdet.* Detta förhållande är en viktig ingridiens i staistik delen av kursen.

KTH Matematik