SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 9
Inferensteori – konsten att dra slutsatser.
Punkskattningar och deras egenskaper.

Tatjana Pavlenko

23 september 2016

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Inledning: skillnaden mellan sannolikhetsteori och statistisk inferens (Kap. 11.1-11.2).
- Punkskattningar, egenskaper hos en skattning (Kap. 11.3)
- Skattning av väntevärde och varians (Kap. 11.4)
- Objektiva metoder att ta fram skattningar: MK- och ML-skattningar(Kap. 11.5)

Inledning

- I *sannolikhetsteorin* har vi arbetat med stokastiska variabler vars fördelningar och deras parametrar varit *kända*. Utgående från en given sannolikhetsmodell, vill man bestämma sannolikheter för olika intressanta händelser.
- I *statistikteorin* är förhållandet det omvända; vi har en samling av mätvärden (data) från någon fördelning vars parametrar i regel är okända, vi vill använda mätvärdena för att uppskatta de okända parametrarna på något bra sätt.

Utmaningen är att omsätta data till kunskap!

- I dagens tillämpningar träffar man ofta stora mängder av (komplexa) data.

- Most everyone now has heard one of the hottest terms today – *big data*. Big data is a big deal, especially in such data-intensive industries as cybersecurity, finance, healthcare, marketing, transportation, energy, and others. And, many of us are already familiar with the 3V's of big data – volume, velocity, and variety of data. But, the key question is,

  "*How do we extract big knowledge from big data*?"

- The new breed of analytics specialists need to have a combination of skills including statistical techniques, applied mathematical methods, advanced machine learning algorithms, data visualization, and business and communications skills.

  Cited from the book *Big Data and Business Analytics* (Taylor Francis, 2013) by J. Liebowitz, the Orkand Endowed Chair in Management and Technology at University of Maryland University College.

- Vi antar att vi har ett *stickprov*, $x_1, \ldots, x_n$ som är en samling observationer (uppmätta värden) av stokastiska variabler $X_1, \ldots, X_n$ genom experiment. Fördelningen för X beror av en- eller flerdimensionell *okänd* parameter θ.
- Parametern kan ta värden i ett *parameterrum*, bet. Ω_θ, (t. ex. $\Omega_\theta = (0, \infty)$ om vi vet att $\theta > 0$).
- I allmänhet antas $X_1, \ldots, X_n$ oberoende och likafördelade, dvs kommer från samma $F_X(x)$.
- Syftet är att *skatta* den okända fördelningsparametern θ med hjälp av *funktion* av data.

Exempel

1. Opinionsundersökning (se Ex i Kap. 11.2) :
   - 1000 personer väljes på måfå ur en stor population, t.ex. Sveriges befolkning (vid halvårsskiftet i år var Sveriges folkmängd 9 793 172 personer, SCB).
   - En fråga som ska besvaras med *Ja* eller *Nej* ställs. Resultat: 350 personer svarat *Ja*. Data: $x = 350$. Uppskatta andelen *Ja*-svarare $\theta = p$ i hela populationen.
2. Uppskatta medelhastigheten hos hela populationen bilar som passerar korsningen: $\theta = \mu = E(X)$.
   X_i är hastighet hos bil i. Data: $x_1 = 65, x_2 = 50, \dots, x_{78} = 56$.
3. Hur stor är den förväntade andelen fortkörare?
   $\theta = p = P(X > 50)$. Data: $y = 41$.

- Def. En *punktskattning* θ^* av en parameter θ är en funktion av data $(x_1, \ldots, x_n)$ som ger ett ett värde i parameterrum Ω_θ, detta värde ges av
$$\theta^*_{obs.} = \theta^*(x_1, \ldots, x_n).$$
- Viktigt!
  - Mätdata $(x_1, \ldots, x_n)$ ses som utfall av s. v. $(X_1, \ldots, X_n)$.
  - Punktskattningen $\theta^*_{obs.}$ ses som ett utfall (en observation) av den s.v. $\theta^*(X_1, \ldots, X_n)$.
  - Om ny mätdata erhålls så får vi ett nytt utfall $\theta^*_{obs.}$ av den s.v. $\theta^*(X_1, \ldots, X_n)$.
  - Funktionen $\theta^*(X)$ av motsvarande s. v. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ kallas för *skattare av* θ. $\theta^*(X)$ är också en s. v. med t. ex. fördelning, väntevärde och varians.
  - Skilj på θ som är en parameter, dvs okänt tal, och θ^* som är dess skattning. Skattningen varierar med stickprovet, det gör inte θ!
  - *Tokning:* Fördelning för $\theta^*(X)$ talar om vad skattningen kunde blivit istället, om vi gjort om experiment, t ex mäter hastighet hos 78 nya bilar.

Önskvärda egenskaper: fördelningen för en s.v. $\theta^*(X)$ har inte något systematiskt fel. Detta kan preciseras i följande

- Def. En punktskattning $\theta^*_{obs.}$ är *väntevärdesriktig* om

$$E(\theta^*) = \theta$$

för varje $\theta \in \Omega_\theta$.

Ex på tavlan!

Önskvärda egenskaper:

- intuitivt, skattningen bör bli *bättre* då man ökar antaler observationer (mätdata) skattningen baseras på. För att tydligare markera att skattningarna beror an n betecknar vi nu stickprovsvariabeln med $\theta_n^*(X)$.
- Fördelning av $\theta_n^*(X)$ koncentreras mer och mer kring det rätta värdet θ då n växer. Detta kan preciseras i följande
  - Def. Om för varje fixt $\theta \in \Omega_\theta$ och för varje givet $\varepsilon > 0$

$$P(|\theta_n^* - \theta| > \varepsilon) \to 0$$

då stickprovsstorleken $n \to \infty$ sägs $\theta_{obs.}^*$ vara *konsistent*.

- *Tolkning*: för ett stort stickprov är det troligt att punktskattningen ligger nära det rätta värdet θ.

Ex på tavlan!

Önskvärda egenskaper:

- som koncentrationsmått/spridningmått för stickprovsvariabeln θ^* används ofta variansen, $V(\theta^*)$. Vid val mellan två olika väntevärdesriktiga skattningar föredrar man en som har *liten spridning*, vilket leder oss till följande
  - Def. Om θ^* och $\hat{\theta}$ är två skattningar väntevärdesriktiga och

    $$V(\theta^*) \leq V(\hat{\theta})$$

    för alla $\theta \in \Omega_\theta$, med strikt olikhet för något $\theta \in \Omega_\theta$, sägs θ^* vara *effektivare* än $\hat{\theta}$.
- *Tolkning*: Man väljer den väntevärdesriktiga skattningen som har *lägst varians*! Detta kallas för den *effektivaste skattningen*.

Ex på tavlan!

Ett sätt att samtidigt ta hänsyn till både *systematsikt* fel (*bias* på engelska), $E(\theta^*) - \theta$, och *slumpmässigt* fel är att studera *medelkvadratfel*.

- Def. En skattnings medelkvadratfel (MSE, Mean Square Error) är

$$\text{MSE} = E((\theta^* - \theta)^2).$$

- Medelkvadratfel kan skrivas som (se def 11.4 på s. 248 i Blom)

$$\text{MSE} = V(\theta^*) + (E(\theta^*) - \theta))^2,$$

dvs som summan av skattningens varians och kvadraten på systematsikt fel.

$$\text{MSE} = V(\theta^*) + (E(\theta^*) - \theta))^2.$$

- För väntevärdesriktig skattning är systematsikt fel lika med noll, $E(\theta^*) - \theta = 0$. Detta innebär att för väntevärdesriktiga skattningar har vi
$$\text{MSE} = V(\theta^*).$$
- Obs! När vi talar om väntevärde (varians) för en punktskattning är det vänteväirde (varians) för en *skattare*, dvs för s.v.$\theta^*(X)$. Vi skriver $E(\theta^*)$ ist. för omständigare $E(\theta^*(X))$, och $V(\theta^*)$ ist. för omständigare $V(\theta^*(X))$.

Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara mätdata som ses som observationer av oberoende s.v $X_1, \ldots, X_n$ vilkas fördelning har väntevärde μ och variansen σ^2, dvs

$$E(X_i) = \mu \quad \text{och} \quad V(X_i) = \sigma^2 \quad \text{för alla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Syftet är att skatta de okända parametrar μ och σ^2 med hjälp av $x_1, \ldots, x_n$.
- Vi använder *stickprovsmedelvärde* och *stickprovsvarians*

$$\mu^*_{obs.} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (\sigma^2)^*_{obs.} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

  som är naturliga (intuitiva) skattningar för μ och σ^2 och ofta har bra teoretiska egenskaper.
- Sats: $\bar{x}$ och s^2 är väntevärdesriktiga och konsistenta skattningar för μ resp. σ^2.

KTH Matematik

- Hitttils har vi använt intuition för att konstruera skattningar. Det finns mer rationella sätt att ta fram skattningar för parametrar i olika fördelningar. En av dessa är

  Maximum likelihood-, ML-metoden: man väljer som skattningen ett värde, sådant att sannolikhet för den givna mätdatan maximeras.

  - Def. Funktionen

$$L(\theta) = \begin{cases} p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta) & \text{diskreta fallet} \\ f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta) & \text{kontinuerliga fallet} \end{cases}$$

    kallas för *likekihood-funktionen* (förk. L-funktionen).

- *Tolkning av ML-metoden*: I L-funktionen låter man argumentet θ variera inom Ω_θ och ser efter för vilket värde på argumentet $L(\theta)$ maximeras. Detta värde tas som ML-skattning av parametern θ.

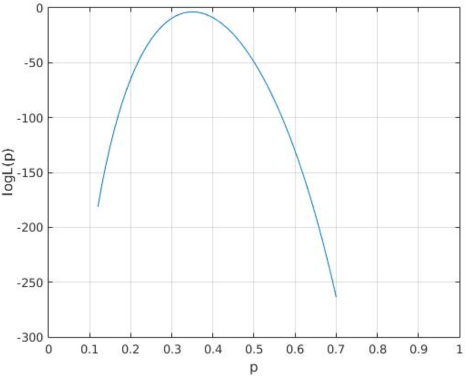
KTH Matematik

- Def. Det värde $\theta^*_{obs.}$, för vilket $L(\theta)$ antar sitt största värde inom Ω_θ kallas för maximum-likelihood-skattningen (ML-skattningen) av θ.
- Om $x_1, \ldots, x_n$ är utfall av oberoende, *likaförselade* s.v. $X_1, \ldots, X_n$ så får vi

$$L(\theta) = \begin{cases} \Pi_{i=1}^n p_X(x_i;\theta) & \text{diskr. fallet} \\ \Pi_{i=1}^n f_X(x_i;\theta) & \text{kont. fallet} \end{cases}$$

- Produktformen av $L(\theta)$ gör att maximeringen kan bli besvärlig. Det är lämpligt att i stället maximera $\ln L(\theta)$, *log-likelihood-funktion*, som ger en summa och maximeringen förenklas. Logaritmen är en monotont växande funktion, så $L(\theta)$ och $\ln L(\theta)$ antar maximum i samma punkt.
- Ex på tavla!

Maximum-likelihood-metoden (forts.)



Figur : Plot av log-likelihood-funktionen för Ex om opinionsundersökning.