Mer om problem **4.25** och variabelbyten

Problem **4.25** i kurslitteraturen räknades under övning 6. Den lösning som går att hitta i lösningsförslaget använder det som i kurslitteraturen kallas *faltningsformeln*. Nedan presenteras en alternativ lösning på problemet med en mer generell metod där faltningsformeln är det specialfall då $Z = X + Y$ och X, Y är oberoende.

Lösningsskiss. Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y)$. Låt $Z := f(X, Y)$. Uppgiften är att hitta $f_Z(z)$.

1. Definiera en hjälpvariabel $W := g(X, Y)$
2. Uttryck X och Y i termer av Z, W. D.v.s. hitta $X(Z, W)$ och $Y(Z, W)$.
3. Hitta täthetsfunktionen för den tvådimensionella stokastiska variabeln (Z,W) genom variabelbytet

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(X(z, w), Y(z, w))|\det J|$$

   där J betecknar Jacobimatrisen

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial w} \end{bmatrix}$$

4. Beräkna den sökta marginella täthetsfunktionen

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z, w)dw$$

Metoden är attraktiv av flera skäl. Vi kräver inte oberoende mellan X och Y. Metoden kan användas för att hitta fördelningen för en godtycklig funktion $f(X, Y)$ (under vissa deriverbarhets- och inverterbarhetskrav), inklusive ickelinjära funktioner.

Problem 4.25 Vi använder lösningsmetoden ovan. I detta fall är $Z = f(X, Y) = X + Y$.

Första steget är att introducera hjälpvariabeln W. W kan väljas relativt fritt men ett bra val förenklar beräkningarna. Som en tumregel kan vi säga att om Z är en linjär kombination av X, Y så är $W = X$ eller $W = Y$ enkla och bra val av W. I denna uppgift är $f(X, Y)$ en linjär funktion så vi väljer att definera $W := X$.

Nästa steg är att hitta uttryck för X och Y i termer av Z, W. Eftersom att $W = X$ har vi trivialt att X kan skrivas som $X(Z, W) = W$. Vi har även $Z = X + Y \iff Y = Z - X = Z - W = Y(Z, W)$.

Enligt skissen ovan kan vi nu uttrycka täthetsfunktionen för (Z, W) som

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(X(z, w), Y(z, w))|\det J|$$

. Vi sätter in våra uttryck för $X(Z,W)$ och $Y(Z,W)$.

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(w, z-w)|\det J|.$$

Vi behöver hitta determinanten av Jacobimatrisen J. Genom att beräkna de partiella derivatorna av $X(z,w)$ och $Y(z,w)$ får vi

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och

$$|\det J| = |-1| = 1$$

vilket betyder att vi kan yttrycka täthetsfunktionen för (Z,W) som

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(w, z-w) \cdot 1 = f_{X,Y}(w, z-w).$$

Den marginella tätheten $f_Z(z)$ kan nu beräknas genom att integrera bort w.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,W}(z,w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(w, z-w)dw$$

X, Y är oberoende varför

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(w, z-w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)f_Y(z-w)dw$$

Notera att integralen ovan är precis faltningsformeln, d.v.s. det specialfall av lösningsmetoden då $Z = X + Y$ och X, Y är oberoende. Det som återstår är att avgöra i vilket område integranden är nollskild.

- $f_X(w)$ är nollskild om $w \geq 0$
- $f_Y(z,w)$ är nollskild om $z-w \in [0,1]$ vilket är ekvivalent med $w \in [z-1, z]$.

Vi har med andra ord att w är begränsad ovanifrån av z och underifrån av 0 och $z-1$. Därmed gäller det att integranden $f_X(w)f_Y(z-w)$ är nollskild i området $\max(z-1,0) \leq w \leq z$. Vi kan nu beräkna integralen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)f_Y(z-w)dw &= \int_{\max(z-1,0)}^{z} e^{-w} \cdot 1dw \\ &= \Big[-e^{-w}\Big]_{\max(z-1,0)}^{z} \\ &= e^{-\max(z-1,0)} - e^{-z}.\end{aligned}$$

Svaret är alltså $f_Z(z) = e^{-\max(z-1,0)} - e^{-z}$, $z \geq 0$.