SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 12
5 december 2017

Idag

Förra gången

Approximativa konfidensintervall (Kap. 12.4)

Hypotesprövning (Kap. 13.1–13.3)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap 13.6)

Idag

Förra gången

Approximativa konfidensintervall (Kap. 12.4)

Hypotesprövning (Kap. 13.1–13.3)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap 13.6)

Förra gången: konfidensintervall

- Vi har konstruerat konfidensintervall för
  (1) väntevärdet μ och standardavvikelsen σ (alt. variansen σ^2) hos en $N(\mu, \sigma)$-fördelning ("ett stickprov").
  (2) skillnaden $\mu_1 - \mu_2$ mellan väntevärdena hos två normalfördelningar $N(\mu_1, \sigma_1)$ och $N(\mu_2, \sigma_2)$ i fallen då σ_1 och σ_2 är kända alt. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd ("oberoende stickprov").
  (3) en systematisk skillnad Δ baserat på differenser $z_i = y_i - x_i$, där x_i och y_i är oberoende observationer från $N(\mu_i, \sigma_1)$ resp. $N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$ ("stickprov i par") där σ_1 och σ_2 är okända.

Sammanfattning: λ- och t- metoderna

- Vi fann följande metoder för hur man bildar konfidensintervall i normalfördelningsfallet.
- *λ-metoden:* Låt θ^* vara $\mathrm{N}(\theta, D)$-fördelad, där D är känd och θ okänd. Då är
$$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm \lambda_{\alpha/2} D\right)$$
ett konfidensintervall för θ med konfidensgraden $1 - \alpha$.
- *t-metoden:* Låt θ^* vara $\mathrm{N}(\theta, D)$-fördelad, där θ och D är okända. Låt vidare d vara en punktskattning av D sådan att $(\theta^* - \theta)/d \in t(k)$. Då är
$$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm t_{\alpha/2}(k) d\right)$$
ett konfidensintervall för θ med konfidensgraden $1 - \alpha$.

Exempel: oberoende stickprov — igen

- Låt
  - $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ vara oberoende observationer av $N(\mu_1, \sigma_1)$-fördelade s.v. och
  - $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ vara oberoende observationer av $N(\mu_2, \sigma_2)$-fördelade s.v.
- Vi vill konstruera ett $(1-\alpha)$-gradigt konfidensintervall för *differensen*

$$\mu_1 - \mu_2.$$

- Här föreligger två fall:
  (a) σ_1 och σ_2 är kända,
  (b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd.

Exempel: oberoende stickprov — igen (forts.)

- Vi tittar t.ex. på fall (b): $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd.
- I formelsamlingen (FS) utläses

$$\text{FS 11.2 (a): } \bar{X} - \bar{Y} \in \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right),$$

$$\text{FS 11.2 (d): } \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in t(n_1 + n_2 - 2),$$

- Nu: FS 11.2 (a) + FS 11.2 (d) + FS 12.2 (t-metoden) $\Rightarrow$

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(k)d),$$

med $d = s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$ och $k = n_1 + n_2 - 2$.

Idag

Förra gången

Approximativa konfidensintervall (Kap. 12.4)

Hypotesprövning (Kap. 13.1–13.3)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap 13.6)

Approximativa metoden

- Vi låter nu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara ett stickprov från någon generell fördelning med okänd parameter θ.
- Antag att θ^* är en punktskattning av θ sådan att

  $$\theta^* \in \mathrm{AsN}(\theta, D),$$

  I likhet med λ-metoden erhålls det $(1-\alpha)$-gradiga *approximativa* konfidensintervallet

  $$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm \lambda_{\alpha/2} D\right).$$

- Ofta är D okänd men kan ersättas med ett lämpligt valt medelfel d. Detta ger det—än mer—approximativa konfidensintervallet

  $$\mathrm{I}_\theta = \left(\theta^*_{\mathrm{obs}} \pm \lambda_{\alpha/2} d\right).$$

Exempel: förpackningar

- En förpackningstillverkare i Lund vill minska risken för läckage i sina förpackningar genom en förändring i förpackningsmaterialet. För att undersöka om förändringen har effekt testar man, innan materialet ändrats, läckage på 15000 slumpvis utvalda förpackningar med resultatet att 30 förpackningar uppvisar läckage. När förändringen implementerats testar man läckage på 15000 nya förpackningar med resultatet att 10 förpackningar uppvisar läckage.
- Konstruera ett konfidensintervall för förändringen i läckagesannolikhet med den approximativa konfidensgraden 99%.
- Slutsats?

Idag

Förra gången

Approximativa konfidensintervall (Kap. 12.4)

Hypoteslprövning (Kap. 13.1–13.3)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap 13.6)

Exempel: Ecstasy-smuggling

Exempel: Ecstasy-smuggling

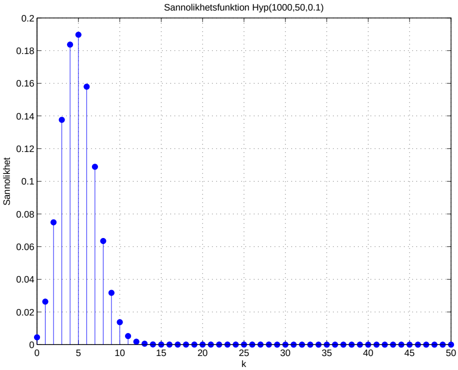
- (Detta exempel är baserat på ett verkligt fall.) På Öresundsbron beslagtas ett parti med 1000 Ecstasy-tabletter. Partiet kasseras, förutom 50 st. slumpmässigt utvalda tabletter vilka skickas till *Statens kriminaltekniska laboratorium* (SKL, numera *Nationellt forensiskt centrum*) för analys. SKL konstaterar att de 50 tabletterna verkligen är Ecstasy. Vid rättegången hävdar dock den tilltalade att det endast fanns 100 Ecstasy-tabletter bland de 1000 och att samtliga övriga tabletter var sockerpiller. Detta skulle medföra en lindrigare påföljd.
- Åklagarsidan kallar in en statistiker för en analys.

Exempel: Ecstasy-smuggling

- Hur skulle en statistisk analys kunna gå till?
  (a) Man räknar helt enkelt ut sannolikheten att det finns fler är 100 stycken Ecstasy-tabletter i partiet. Om denna är nära 1 så anses den tilltalade ljuga.
  (b) Man antar att den tilltalade talar sanning och räknar ut sannolikheten att man då vid ett slumpmässigt urval av 50 tabletter väljer endast Ecstasy-tabletter. Om denna sannolikhet är mycket liten så anses den tilltalade ljuga.
  (c) Man antar att den tilltalade ljuger och räknar ut sannolikheten att man då vid ett slumpmässigt urval av 50 tabletter väljer endast Ecstasy-tabletter. Om denna sannolikhet är mycket nära 1 så anses den tilltalade ljuga.

[svar: (b)]

Exempel: Ecstasy-smuggling — igen (forts.)



Figur: Sannolikhetsfunktion för Hyp$(1000, 50, 0.1)$-fördelningen.

Generell metod

- Vi har ett slumpmässigt stickprov $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som anses vara ett utfall av s.v. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ med någon fördelning.
- Vi vill testa en viss *nollhypotes* H_0 rörande fördelningen.
- För att pröva H_0 definierar vi först en *testvariabel* $t_{\text{obs}} = t(\mathbf{x})$ som är en observation av motsvarande *stickprovsvariabel* $t(\mathbf{X})$
- och definierar en signifikansnivå (felrisk) $0 < \alpha < 1$, t.ex. $\alpha = 5\%$.

Generell metod (forts.)

- Testet utförs nu som följer:

$$\text{om} \begin{cases} t_{\text{obs}} \in C, & \text{förkasta } H_0, \\ t_{\text{obs}} \notin C, & \text{förkasta ej } H_0, \end{cases}$$

  där det *kritiska området* C är avpassat så att

$$\mathbb{P}(H_0 \text{ förkastas}) = \mathbb{P}(t(\mathbf{X}) \in C) = \alpha \quad \text{om } H_0 \text{ är sann.}$$

- Att $t_{\text{obs}} \in C$ är alltså en extrem händelse om H_0 är sann, och vi kan alltså förkasta H_0 med gott samvete om detta inträffar.
- Om H_0 förkastas sägs det *föreligga en signifikant avvikelse från nollhypotesen H_0 på nivån α*.

Generell metod (forts.)

- Vi kommer alltid att låta H_0 vara en *enkel hypotes*, dvs. omfatta endast *ett* parametervärde θ_0.
- För att rationellt kunna välja kritiskt område C så specificeras en *mothypotes* H_1 som kan (men inte måste) vara sann om H_0 inte är det.
- Mothypotesen H_1 kan vara *sammansatt*, dvs. omfatta fler än ett parametervärde.
- Ett bra test förkastar H_0 med stor sannolikhet om H_1 är sann. Denna egenskap beskrivs av testets *styrka*, vilken vi ska diskutera nästa föreläsning.

Varning!

- Ett hypotestest syftar alltså till att undersöka om en hypotes H_0 kan förkastas.
- Dock: det är viktigt att observera skillnaden mellan "icke förkasta" och "godkänna"!
- Exempel: man observerar antal ben t på ett djur och låter

$$H_0 : \text{djuret är en häst.}$$

  Kritiskt område är $C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, \dots\}$ och H_0 förkastas om $t \in C$.
- Men om H_0 inte förkastas så betyder det inte direkt att djuret är en häst — det kan ju röra sig om något annat fyrfotadjur!

Exempel: Ecstasy-smuggling — igen

- I detta fall är $x = 50$ en observation av $X \in \mathrm{Hyp}(1000, 50, p)$.
- Vi låter nollhypotesen vara att den tilltalade talar sanning, dvs.

$$H_0 : p = p_0 = \frac{100}{1000} = 0.1,$$

  och mothypotesen att han inte gör det, dvs.

$$H_1 : p > p_0.$$

- Testet utförs på signifikansnivån $\alpha = 0.001$.

Exempel: Ecstasy-smuggling — igen (forts.)

- Vi har i detta fall en enda observation och låter så $t_{\text{obs}} = t(x) = x$.
- Då C skall uppfylla

$$\mathbb{P}(H_0 \text{ förkastas}) = \mathbb{P}(X \in C) = \alpha \quad \text{om } H_0 \text{ är sann,}$$

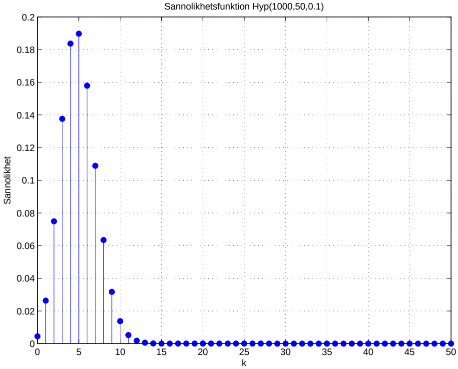
  kan vi helt enkelt låta $C = [x_\alpha, 50]$, där x_α är 0.001-kvantilen för $\text{Hyp}(1000, 50, 0.1)$-fördelningen. Ett utfall i C indikerar H_1, dvs. att p är större än $p_0 = 0.1$.
- Med hjälp av MATLAB erhålls kvantilen ifråga enligt

```
>> hygeinv(0.999,1000,100,50)

ans =

    12
```

Exempel: Ecstasy-smuggling — igen (forts.)

- Då $x = 50 \in \mathrm{C} = [13, 50]$ kan vi förkasta H_0.
- Om vi hävdar att den tilltalade ljuger riskerar vi alltså göra ett felslut med endast ett på tusen.

Exempel: Ecstasy-smuggling — igen (forts.)



Figur: Sannolikhetsfunktion för $Hyp(1000, 50, 0.1)$-fördelningen.

Idag

Förra gången

Approximativa konfidensintervall (Kap. 12.4)

Hypotesprövning (Kap. 13.1–13.3)

Tillämpning på normalfördelningen (Kap 13.6)

Tillämpning på normalfördelningen

- Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från en $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$-fördelning.
- Vi vill pröva den enkla hypotesen

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

och tar som testvariabel

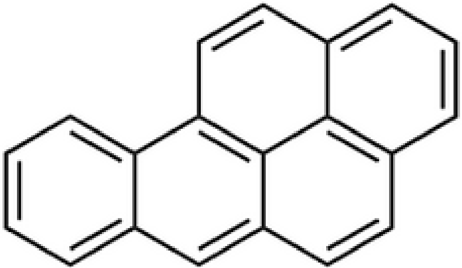
$$\tau = \begin{cases} (\bar{x} - \mu_0)/D & \text{om } \sigma \text{ är känt, där } D = \sigma/\sqrt{n}, \\ (\bar{x} - \mu_0)/d & \text{om } \sigma \text{ är okänt, där } d = s/\sqrt{n}. \end{cases}$$

- Om H_0 är sann är dessa kvoter $\mathrm{N}(0, 1)$- resp. $t(n-1)$-fördelade.
- Kritiskt område bestäms med hjälp av λ- eller t-kvantilerna.

Tillämpning på normalfördelningen (forts.)

- Om mothypotesen är på formen
  - $H_1 : \mu \gtrless \mu_0$ bör testet vara *ensidigt*, dvs. förkasta H_0 om $\tau \gtrless \pm\lambda_\alpha$ (eller $\tau \gtrless \pm t_\alpha(n-1)$ om σ är okänt).
  - $H_1 : \mu \neq \mu_0$ bör testet vara *tvåsidigt*, dvs. förkasta H_0 om $|\tau| \geq \lambda_{\alpha/2}$ (eller $|\tau| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ om σ är okänt).

Exempel: förorenad jord?



Figur: Bensopyren

Exempel: förorenad jord?

- Man planerar att bygga bostäder på mark där det tidigare bedrivits industriverksamhet och vill därför undersöka förekomsten av PAH* i jordlagret. Naturvårdsverkets PAH-riktvärde för känslig markanvändning är 0.3 mg/kg jord. Med hjälp av skruvborrning erhålls ett stickprov omfattande $n = 20$ jordprover med representativ halt $\bar{x} = 0.32$. Standardavvikelsen skattas till $s = 0.05$ mg/kg.
- Avgör med hjälp av en hypotesprövning på nivån 5% om PAH-halten i jordlagret överstiger Naturvårdsverkets riktvärde. Antag normalfördelning.

[svar: Ja, halten är signifikant* högre än riktvärdet.]

*Polycykliska aromatiska kolväten. Exponering för dessa kan medföra ökad risk för cancer.

Nästa föreläsning

- Mer om hypotesprövning,
- styrkefunktioner,
- användning av normalapproximation,