

Markovprocesser

SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 2
Markovprocesser
30 Mars 2015

Föreläsningsplan

- 1 Förra Föreläsningen
- 2 Absorption
- 3 Mer om klassifikation av tillstånd
- 4 Konvergens av Markovkedjor

Föreläsningsplan

- 1 Förra Föreläsningen
- 2 Absorption
- 3 Mer om klassifikation av tillstånd
- 4 Konvergens av Markovkedjor

Diskret Markovkedja

- Vi betraktar nu processer $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ i diskret tid som tar värden i ett ändligt (eller uppräkneligt) tillståndsrum $\mathbf{E}$.
- Vi låter $\mathbf{E}$ vara en heltalsmängd;
 - ▶ $\mathbf{E} = \{1, 2, \dots, N\}$, ändligt tillståndsrum.
 - ▶ $\mathbf{E} = \{1, 2, \dots\}$, uppräkneligt tillståndsrum.

Definition (Markovegenskapen)

$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ är en **Markovkedja** om

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n),$$

för alla n och alla $i_0, \dots, i_n \in \mathbf{E}$

Tidshomogenitet, Övergångssannolikheter och Övergångsmatris

Definition

Låt $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ vara en Markovkedja. Om de betingade sannolikheterna $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ inte beror på n (för alla $i, j \in \mathbf{E}$) sägs kedjan vara **tidshomogen**. I detta fall definierar vi **övergångssannolikheterna**

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

övergångsmatrisen $\mathbf{P}$ är matrisen vars element med index (i, j) är p_{ij} .

Chapman-Kolmogorov

Följande resultat är centralt för att kunna använda Markovkedjor.

Sats (Chapman-Kolmogorovs ekvationer, 3.1)

$$a) p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

$$b) \mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}$$

$$c) \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$$

$$d) \mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^n$$

Stationär fördelning

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\pi \mathbf{P} = \pi$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

Föreläsningsplan

- 1 Förra Föreläsningen
- 2 Absorption**
- 3 Mer om klassifikation av tillstånd
- 4 Konvergens av Markovkedjor

Klassificering av tillstånd

- Vi säger att tillstånd i leder till tillstånd j om det är möjligt att i ett ändligt antal steg komma från i till j .
- Ett tillstånd som bara leder till sig själv kallas för ett absorberande tillstånd.
 - ▶ Att tillstånd i är absorberande betyder att $p_{ii} = 1$.
- En Markovkedja kan ha inga, ett eller flera absorberande tillstånd.
- Intressanta frågor är:
 - ▶ Kommer vi hamna i ett absorberande tillstånd?
 - ▶ Hur lång tid tar det innan vi hamnar där?
 - ▶ Om det finns flera, vad är sannolikheten att vi hamnar i ett specifikt absorberande tillstånd?

Klassificering av tillstånd

Definition (3.5)

En Markovkedja kallas **A-kedja** om varje tillstånd i antingen är absorberande eller leder till ett absorberande tillstånd.

Definition (3.6)

Ett tillstånd i som leder till ett tillstånd från vilket kedjan ej kan återvända till i kallas ett **genomgångstillstånd**

Tillståndsrummet **E** i en A-kedja kan alltså delas upp i en mängd av absorberande tillstånd **A** och en mängd genomgångstillstånd **G**,
$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cup \mathbf{G}$$

Exempel

Exempel (Tärningsspel, uppg. 16)

A och B deltar i ett tärningsspel, som tillgår på följande sätt: Om tärningen visar 1 eller 2 så vinner kastaren, om den visar 3 får hen göra ytterligare ett kast. Visar tärningen 4 eller 5 får den andre kasta, och kommer 6 upp förlorar kastaren. Antag att A börjar kasta. Ställ upp problemet och beräkna

- a) sannolikheten att B vinner.*
- b) väntevärdet för det antal spelomgångar som krävs för att avsluta spelet.*

Absorptionssannolikheterna

Sats (3.3)

Absorptionssannolikheterna a_{ij} , där a_{ij} är sannolikheten för absorption i tillstånd j givet start i tillstånd i i en ändlig Markovkedja, uppfyller för alla $j \in \mathbf{A}$ följande ekvationssystem,

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in \mathbf{G}} p_{ik} a_{kj}, \quad i \in \mathbf{G}.$$

$\sum_{j \in \mathbf{A}} a_{ij} = 1$, dvs sannolikheten är 1 att kedjan absorberas, vilket tillstånd man än startar vid.

Absorptionstiderna

Sats (3.4)

Låt i i en Markovkedja T_i vara tiden tills kedjan absorberas vid start i tillstånd $i \in \mathbf{G}$. Låt även $t_i = \mathbb{E}[T_i]$ vara förväntade tiderna tills absorption vid start i tillstånd i . Då uppfyller dessa följande ekvationssystem,

$$t_i = 1 + \sum_{k \in \mathbf{G}} p_{ik} t_k, \quad i \in \mathbf{G}.$$

Föreläsningsplan

- 1 Förra Föreläsningen
- 2 Absorption
- 3 Mer om klassifikation av tillstånd**
- 4 Konvergens av Markovkedjor

Kommunicerande tillstånd

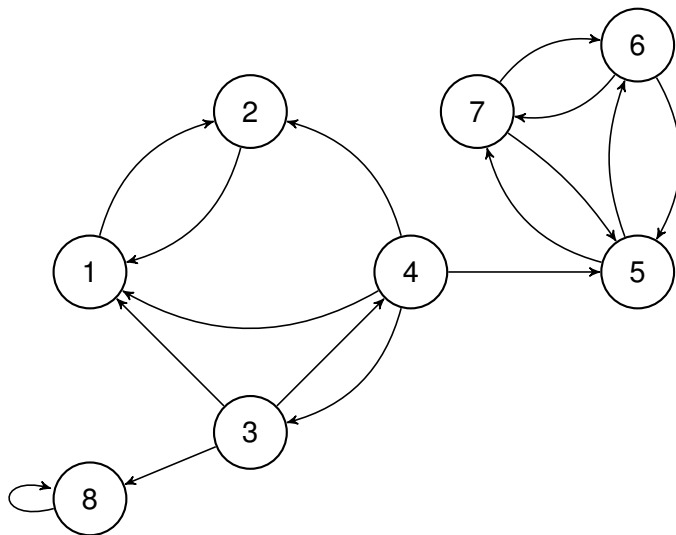
Definition (4.1)

Ett tillstånd i sägs leda till tillstånd j om det är möjligt att gå från tillstånd i till j i noll, ett eller flera tidssteg, skrivs $i \rightarrow j$.

Två tillstånd sägs kommunicera om $i \rightarrow j$ och $j \rightarrow i$, skrivs $i \leftrightarrow j$

Egenskapen $\leftrightarrow$ definierar en ekvivalensrelation på tillstånden i en Markovkedja.

Exempel



Mer om klassificering av tillstånd

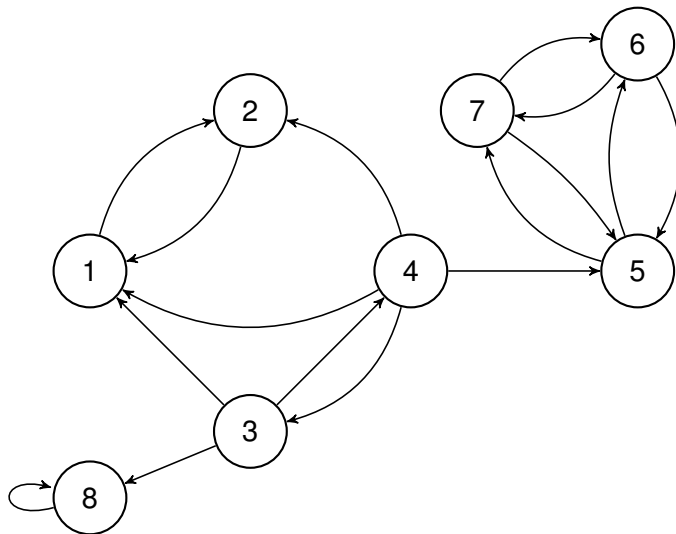
Definition (4.2)

En delmängd sägs vara sluten om inget tillstånd i leder ut från delmängden.

Definition (4.3)

En mängd av tillstånd vilka kommunicerar med varandra kallas en irreducibel tillståndsmängd.

Exempel

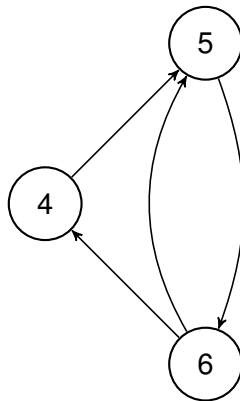
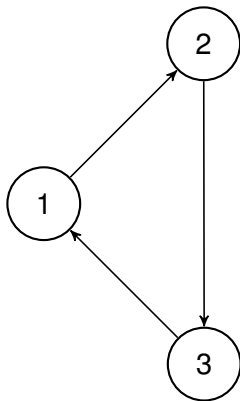


Period

Definition (4.4)

Låt D_i vara mängden av alla heltal n så att det är möjligt att från tillståndet i återvända till detta tillstånd i n tidssteg. Med period d_i menas den största gemensamma delaren till talen i D_i . Om $d_i = 1$ kallas i för aperiodisk.

Exempel



Föreläsningsplan

- 1 Förra Föreläsningen
- 2 Absorption
- 3 Mer om klassifikation av tillstånd
- 4 Konvergens av Markovkedjor

Stationär fördelning

Påminner om definitionen

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

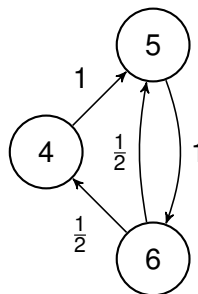
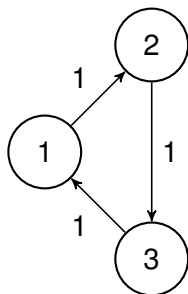
$$\begin{aligned}\pi \mathbf{P} &= \pi \\ \sum_i \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}\end{aligned}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

När hamnar vi i en stationär fördelning?

Betrakta de två Markovkedjorna nedan. Hur beter de sig efter lång tid?



En periodisk kedja

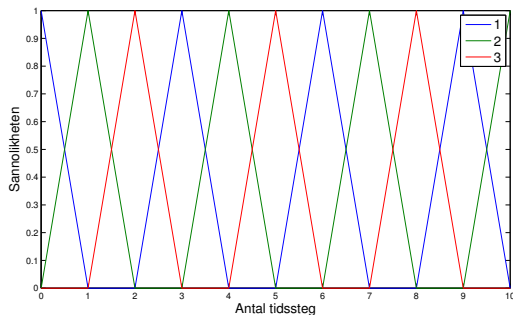


Figure: Fördelningsvektorer för olika tidssteg. Trots att stationär fördelning finns nås den aldrig.

En aperiodisk kedja

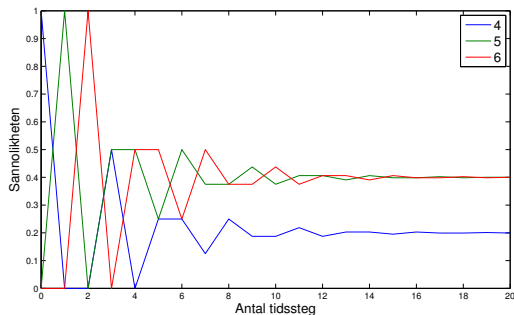


Figure: Fördelningsvektorer för olika tidssteg. Stationära fördelningen nås i detta fall.

Ergodicitet

Definition (5.2)

En Markovkedja $\{X_n; n \geq 0\}$ sägs vara ergodisk om en gränsfördelning $\mathbf{p}$ existerar och den är oberoende av startfördelning.

Följande sats är en av huvudsatserna i teorin för Markovkedjor

Sats (5.2)

En ändlig, irreducibel, aperiodisk Markovkedja är ergodisk och dess gränsfördelning är den entydiga, stationära fördelningen.

Exempel

Studera hur kedjan beter sig efter lång tid.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Typisk tentaformulering: Undersök om Markovkedjan har en asymptotisk fördelning och beräkna i så fall denna.

Icke irreducibelt exempel

Studera hur kedjan beter sig efter lång tid.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = j)$ för $i, j \in \mathbf{E}$.

Stationär fördelning

Sats (5.3)

En ändlig, irreducibel kedja har en entydlig stationär fördelning π och det gäller att $\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}(T_i)}$ där T_i är tiden mellan två besök i tillstånd i . Kvoten $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ är förväntad tid i tillstånd j mellan två besök i tillstånd i .

Exempel

Exempel

*En lektor och småbarnsfar pendlar från dag till dag mellan tre tillstånd:
1 = pigg, 2 = trött, 3 = dödstrött*

Tillstånden varierar som en Markovkedja med övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

*Hur många dagar i snitt är det mellan varje dag lektorn är pigg?
Hur många av dessa dagar i snitt är lektorn dödstrött?*

Ickeändlig Markovkedja

En ickeändlig Markovkedja kan också vara ergodisk och ha en stationär fördelning.

Sats (5.6)

Låt $\mathbf{P}$ vara övergångsmatrisen till en irreducibel, aperiodisk Markovkedja. Betrakta följande ekvationssystem, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{xP} \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Då gäller att Markovkedjan är ergodisk och har en stationär fördelning om $0 < \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$

Om lösningen satisfierar $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$ så har kedjan ingen stationär fördelning och är inte ergodisk.

Exempel

Exempel (5.5)

En partikel vandrar på de naturliga talen $\mathbb{N} = (0, 1, 2, \dots)$ och låt den gå ett steg till höger med sannolikhet p och ett steg till vänster med sannolikhet $q = 1 - p$. I punkten 0 stannar partikeln kvar med sannolikhet q . Avgör för vilka värden på p som kedjan är ergodisk och beräkna då den stationära fördelningen.