Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 5
Markovprocesser
24 April 2015

Föreläsningsplan

1. Förra Föreläsningen
2. Poissonprocessen
3. Födelse-döds-processer

Föreläsningsplan

1. Förra Föreläsningen
2. Poissonprocessen
3. Födelse-döds-processer

Intro till Markovprocesser

- Vi studerar nu Markovprocesser, vilket är en stokastisk process i kontinuerlig tid.
- Många definitioner är snarlika motsvarande definitioner för Markovkedjor.
- $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(0) = i)$ och $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))_{ij}$.
- Chapman-Kolmogorovs ekvationer finns på motsvarande sätt som i Markovkedjor.
- Tiden mellan hopp måste vara strikt större än noll (reguljär Markovprocess).
- Tiden mellan hopp är Exponentialfördelad då det är den enda (kontinuerliga) fördelningen som saknar minne.

Intensitetsmatrisen

- Intensitetsmatrisen $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{ij}$ introducerades där:
  - q_{ij} för $j \neq i$ är intensiteten med vilken processen rör sig från tillstånd i till j.
  - $q_i = \sum_{i \neq j} q_{ij}$ är uthoppsintensiteten för tillstånd i.
  - $q_{ii} = -q_i$ är diagnoalelementen.
- Radsumman i $\mathbf{Q}$ är noll.
- Via Chapman-Kolmogorov fick vi följande bakåt och framåt ekvationer:
  - $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$
  - $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$

  med lösningen:
  - $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$.
- Ekvationssystemet ovan kan skrivas som

$$p'_{ij}(t) = p_{i0}(t)q_{0j} + p_{i1}(t)q_{1j} + p_{i2}(t)q_{2j} + \cdots$$

Inbäddade Markovkedjan

- Om vi låter $t_0 = 0$ och t_i vara tidpunkten för hopp nummer i hos en Markovprocess med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$.
- Då kommer $\tilde{X}_n = X(t_n)$ vara en Markovkedja med övergångsmatris $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{ij})_{ij}$
- Vi har också att $\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$.
- Markovkedjan $\tilde{X}_n$ kallas för den inbäddade Markovkedjan.
- Den inbäddade Markovkedjan används för att studera vart en Markovprocess hoppar.

Absorption i Markovprocesser

- Ett absorberande tillstånd är ett tillstånd från vilket man ej kan gå till ett annat tillstånd.
- Det betyder att $q_{ij} = 0$ för alla $j \neq i$, vilket också betyder att $q_i = -q_{ii} = 0$ för ett absorberande tillstånd i (rad av nollor i $\mathbf{Q}$).
- Begreppet **genomgångstillstånd** och **A-kedja** defineras som hos Markovkedjorna.
- Vi inför, analogt med Markovkedjorna, $a_{ij} = \mathbb{P}(\text{absorberas i tillstånd } j \mid X(0) = i)$,
- och T_i som tid till absorption givet start i tillstånd i och $t_i = \mathbb{E}[T_i]$.
- Vi kan beräkna dessa på samma sätt som i Markokedjorna om vi inser att förväntad tid i tillstånd i är $\frac{1}{q_i}$ och använder den inbäddade Markovkedjan.

Absorption i Markovprocesser

Sats (6.5)

Låt a_{ij} vara absorptionssannolikheterna och t_i vara förväntad tid till absorption i en A-kedja med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$. Då gäller för alla absorberande tillstånd j

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} a_{kj}, \quad i \in \mathbf{G}$$

$$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} t_k, \quad i \in \mathbf{G}$$

där $\mathbf{G}$ är alla genomgångstillstånd.

Bevisas på samma sätt som för Markovkedjor.

Global balans

Sats (6.6)

π är en stationär fördelning till en reguljär Markovprocess med tillståndsrum **E** *om och endast om* $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = 0$. *Denna ekvation kan skrivas som*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i q_{ij} &= 0, \quad \forall j \in \mathbf{E} \\ \sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i &= 1, \\ \pi_i &\geq 0, \quad \forall i \in \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Första ekvationen kallas för ***global balans***.

Lokal balans

Definition (Lokal balans)

En sannolikhetsfördelning π uppfyller **lokal balans** om

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathbf{E}$$

- $\pi_i q_{ij}$ kan benämnas med flödet från i till j.
- Vid lokal balans är flödet från i till j lika med flödet från j till i.
- Om π uppfyller lokal balans uppfyller den också global balans $\Rightarrow$ π är en stationär fördelning.
- Alla stationära fördelningar uppfyller **inte** lokal balans.

Ergodicitet

Sats (6.8)

En ändlig, irreducibel Markovprocess $\{X(t); t \geq 0\}$ *är ergodisk och gränsfördelningen är den entydiga stationära fördelningen* π*. Kvoten* $\pi_i = \frac{1/q_i}{\mathbb{E}[T_i]}$ *där* T_i *är återkomsttiden för tillstånd* i*. Förväntad tid i tillstånd* j *mellan två besök i tillstånd* i *är* $\pi_j/(q_i\pi_i)$*.*

Sats (6.9)

Låt $\mathbf{Q}$ *vara intensitetsmatrisen till en irreducibel, reguljär Markovprocess. Då är den ergodisk om det existerar en sannolikhetsvektor* π *som uppfyller* $\pi\mathbf{Q} = 0$*.*

Föreläsningsplan

Poissonprocessen

- En speciell Markovprocess som används flitigt inom många olika områden är Poissonprocessen.
- Används ofta när man vill räkna händelser:
  - Ankomster till en affär.
  - Radioaktivt sönderfall.
  - Olyckor.

Definition (6.5)

Poissonprocessen $\{N(t), t \geq 0\}$ är en Markovprocess med uppräkneligt tillståndsrum, $N(0) = 0$ med följande övergångsintensiteter

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i + 1 \\ -\lambda & j = i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Poissonprocessen

Sats (6.3)

Följande definitioner är ekvivalenta.

a) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Poissonprocess.*

b) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Markovprocess med* $N(0) = 0$ *och övergångssannolikheter*

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \text{ om } j \geq i$$

c) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en stokastisk process sådan att*

1) *För alla* $0 \leq s_1 < t_1 \leq \ldots \leq s_n < t_n$ *är* $N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2), \ldots, N(t_n) - N(s_n)$ *oberoende stokastiska variabler.*
2) $N(t) - N(s)$ *är* $Po\,(\lambda(t-s))$ *fördelad.*
3) $N(0) = 0$.

Exempel

Exempel

En maskin har en knapp som växlar mellan på och av som en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 1$. *Maskinen startar vid* $t = 0$ *i tillståndet på. Vad är sannolikheten att maskinen är på vid tidpunkten* $t = 2$*?*

Poissonprocessen

En viktig egenskap hos Poissonprocessen är följande additionsegenskap:

Sats

Om $N_1(t)$ är en Poissonprocess med intensitet λ_1 och $N_2(t)$ är en Poissonprocess med intensitet λ_2, där $N_1(t)$ och $N_2(t)$ är oberoende. Då är $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ en Poissonprocess med intensitet $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Exempel

Exempel (Trafikundersökning)

Vid en trafikundersökning räknade man antalet fordon som passerade en viss punkt på en motorväg. Strömmen av en viss typ fordon kan beskrivas som en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 = 10$ *för bilar,* $\lambda_2 = 3$ *för lastbilar och* $\lambda_3 = 1$ *för bussar (enhet är fordon per minut). Processerna antas vara oberoende av varandra.*

Man studerar vägen under 1 timme. Vad är fördelningen för det totala antalet fordon som passerar punkten? Vad är sannolikheten att en bil efterföljs av en lastbil?

Poissonprocessen i planet

- Poissonprocessen kan ses som slumpmässiga händelser i tiden.
- Poissonprocessen i planet är på samma sätt slumpmässiga händelser i ett område.
- Kan till exempel användas för blixtnedslag, sjukdomsfall.

Definition

Låt $\mathcal{A}$ vara ett område i $\mathbb{R}^2$. En punktprocess $\{N(A), A \subseteq \mathcal{A}\}$ kallas en Poissonprocess med intensitet λ om:

1. De stokastiska variablerna $N(A_1), N(A_2), \ldots, N(A_n)$ är oberoende för disjunkta mängder $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. $N(A) \sim Po(\lambda \|A\|)$ för varje begränsat område $A \subseteq \mathcal{A}$.

Poissonprocess med varierande intensitet

- Det är vanligt att betrakta en Poissonprocess med tids-varierande intensitet $\lambda(t)$.
- Då kommer följande att gälla

$$N(t+s) - N(s) \sim Po(\int_s^{t+s} \lambda(u)du).$$

- Dessa kan simuleras med hjälp av uttunning:
  1. Välj γ så att $\lambda(t) \leq \gamma$ för $0 \leq t \leq T$
  2. Simulera en Poissonprocess $N(t)$ med intensitet γ på $[0, T]$. Låt $T_1, \ldots, T_n$ vara tidspunkten för alla händelser.
  3. Bilda processen $M(t)$ från $N(t)$ genom att radera händelsen vid tidpunkt T_i med sannolikheten $1 - \lambda(T_i)/\gamma$.

Exempel

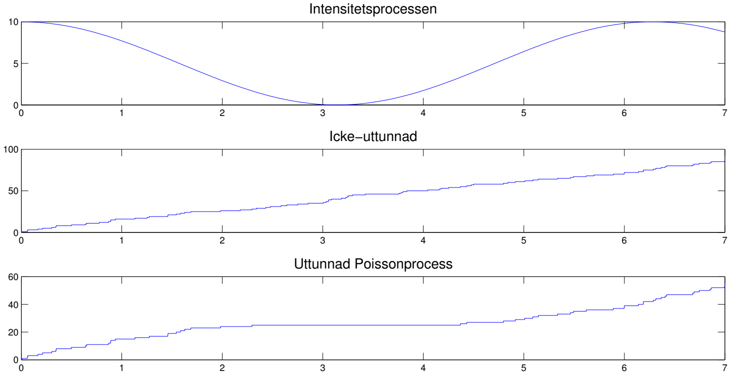

Figure: Simulering av Poissonprocess med intensitet $\lambda(t) = 5\cos(t) + 5$ på intervallet $[0, 7]$.

Föreläsningsplan

Lite allmänt om födelse-döds-processer

- Poissonprocessen är en räkneprocess, dvs. vi räknar händelser som inträffar slumpmässigt i tiden.
- Vi kan tänka oss att hur ofta händelser inträffar beror på antalet händelser hittills.
  - Tänk till exempel på en enkel model för bakterier där varje bakterie delar sig oberoende av de andra. Finns det många bakterier är tiden till nästa kortare.
  - Detta leder till födelseprocesser.
  - Dessa kan omöjligt ha en stationär fördelning om inte något tillstånd är absorberande.
- Födelse-döds-processer är processer som både kan öka och avta.
  - Man kan tänka sig antalet individer i en population, där antalet individer antingen kan öka eler avta.

Födelseprocesser

- En födelsprocess är en Markovprocess med följande intensitetsmatris

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1 \\ -\lambda_i & j = i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Processen är strikt växande.
- Förväntad tid i tillstånd i är $\frac{1}{\lambda_i}$.
- Om vi startar i tillstånd noll är förväntad tid till tillstånd $n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$
- Processen är reguljär om $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.

Exempel

Exempel (Yule-processen)

Låt $\{X(t); t \geq 0\}$ *vara en Markovprocess, där* $X(t)$ *är antalet individer i en population. Varje individ i populationen ger upphov till en ny individ med intensitet* λ *obereoende av varandra. Vi antar att populationen startar med 1 individ. Kommer denna population att explodera? Dvs. är förväntade tiden tills man har oändligt många individer ändlig?*

Födelse-döds-processer

- Vi låter nu individer kunna dö också.
- En födelse-öds-process är en Markovprocess som kan hoppa ner ett steg eller upp ett steg vid varje hopp.
- En födelse-döds-process har följande intensitetesmatris **Q**:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i + 1 \\ \mu_i & j = i - 1 \\ -\lambda_i - \mu_i & j = i \\ -\lambda_0 & i = j = 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Definera $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$.

Förväntade tider

Sats (6.10)

Låt t_n vara förväntad tid tills en födelse-döds-process når tillstånd n, givet start i tillstånd 0. Då är

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k \rho_k} \sum_{j=0}^{k} \rho_j.$$

Sats (6.11)

En födelse-döds-process är reguljär om och endast om

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \rho_k} \sum_{j=0}^{k} \rho_j$$

divergerar.

M/M/1 - kö

Exempel

En M/M/1 - kö är ett kösystem där man antar att kunder anländer enligt en Poissonprocess med intensitet λ. Betjäningtiden för en kund är Exp(μ) fördelad. Det finns dock bara en betjänare, om den är upptagen ställer sig kunderna i en kö.

Ställ upp systemet och beräkna förväntade antalet personer i kön.

En kund anländer till systemet. Hur lång tid förväntas kunden få köa?