Föreläsning 10

Minsta kvadrat-metoden

ex| Anta att vi vill skatta arean av en kvadrat θ med MK-metoden och har mätt upp x_1, x_2 - sidans längd och x_3 diagonalens längd

se F.S. §9.2

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [\underset{\uparrow}{x_i} - \underbrace{\mu_i(\theta_1, \theta_2 .. \theta_k)}_{\text{väntevärdet av det vi mätt upp}}]^2$$

det vi mätt upp

$\mu_i(\theta_1, \theta_2 .. \theta_k)$ = väntevärdet av det vi mätt upp uttryckt i de parametrar vi vill skatta

Ju mindre skillnaden är mellan de praktiska värdena x_i och våra teoretiska värden μ_i desto mindre Q. Min Q m.a.p. $\theta_1, \theta_2 ..$

$\Rightarrow$ MK-skattningar av $\theta_1, \theta_2 .. \theta_k$

~~Hur gör man när vi ska skatta flera parametrar~~

viktat ex | $Q = (x_1 - \sqrt{\theta})^2 + (x_2 - \sqrt{\theta})^2 + (x_3 - \sqrt{2\theta})^2$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \cancel{2}(x_1 - \sqrt{\theta}) \cdot \frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{\theta}} + \cancel{2}(x_2 - \sqrt{\theta})\left(\frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{\theta}}\right)$$

$$+ \cancel{2}(x_3 - \sqrt{2}\sqrt{\theta}) \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{\theta}}\right) \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{2}\, x_3 = \sqrt{\theta} + \sqrt{\theta} + 2\sqrt{\theta}$$

$$4\sqrt{\theta} = x_1 + x_2 + \sqrt{2}\, x_3$$

$$\theta^*_{obs_{MK}} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{2}\, x_3}{4}\right)^2$$

Hur gör vi när vi ska skatta flera parametrar θ_i?
se ex 11.19 sid 261

väntevärdesriktighet
effektivitet

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\frac{5x_3 + 3x_1 + 2x_2}{10}$$

(Se sid 271) **Def** medelfelet för skattningen θ^*_{obs} (Se §9.3)

kallas för $d = D^*(\theta^*_{obs})$

D.v.s. man tar standardavvikelsen för skattningen och skattar denna m.h.a. de data man har.

ex Bin-fördeln $p^*_{obs} = \frac{X}{n}$

$$\text{medelfelet} = D^*_{obs}(p^*)$$

Ta först $V(p^*) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(X) =$

$$= \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$D(p^*) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$d = \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} \quad \text{där } p^*_{obs} = \frac{X}{n}$$

ex $\mu^*_{obs} = \bar{X}$

$$D(\mu^*) = D\left(\frac{\bar{X}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} D(X) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$$

$$d = D^*(\mu^*) = \frac{1}{n}\sigma^*_{obs} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ex $Po(\mu)$ $\quad D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\mu}{n}}$

$$d = D(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$$

Def En skattning θ^*_{obs} av θ sägs vara konsistent $(\Leftrightarrow)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\theta^*_n - \theta| > \varepsilon) \to 0$

Kap 12

Konfidensintervall

Def Ett intervall I_θ som med sannolikheten $1-\alpha$ täcker över θ kallas ett konfidensintervall för θ med konfidensgrad $1-\alpha$

~~d.v.s~~ $\cancel{P(a_1 < \theta < a_2) = 1-\alpha}$

d.v.s $P(\theta \in I_\theta) = 1-\alpha$

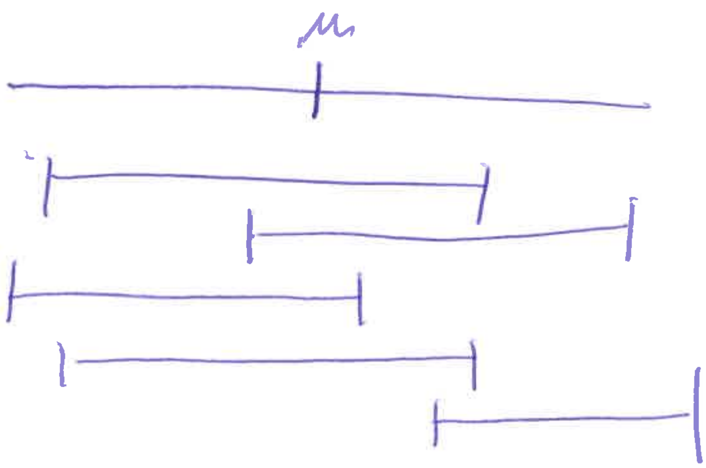
ex Antag att vi vill skatta μ med $\bar{X}$

Vi vill bilda ett intervall runt $\bar{X}$ så att vi med 95%-ig slh täcker över μ

D.v.s $P(\bar{X} - a < \mu < \bar{X} + a) = 0.95$

Då säger vi att vi har ett 95%-igt konf-int för μ

OBServera att det är $\bar{X}$ som är slumpmässigt



95% av konfidensintervallen täcker över μ

Allmänt Anta vi har ett stickprov $\underline{X} = (X_1, \dots X_n)$

Då fås ett konf-int för θ med konfidensgrad $1-\alpha$
så att

$$P(a_1(\underline{X}) < \theta < a_2(\underline{X})) = 1-\alpha$$

Ibland används ensidiga konfi intervall (se kap 13 Hypotesprövning)

$$P(-\infty < \theta < a_2(\underline{X})) = 1-\alpha$$

eller $P(a_1(\underline{X}) < \theta < \infty) = 1-\alpha$

3

Antag nu att vi vill bilda ett konf-int för μ där σ är känt och X_i:na är ober och $N(\mu, \sigma)$

$$P(|\bar{X}-\mu| < a) = 1-\alpha$$

$$P(-a < \bar{X}-\mu < a) = 1-\alpha$$

Se fig

$$P(\bar{X}-\mu > a) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} = \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$I_\mu = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= \bar{x} \pm \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{D(\bar{X})} \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ kallas för felmarginalen

ME = marginal error

jfr

Ett konfidensintervalls bredd beror på 3 saker

1) spridningen hos mätdata   Här: σ
2) antal mätdata vi har   Här: faktorn $\frac{1}{\sqrt{n}}$
3) Hur stor sannolikhet vi vill ha att täcka över sanna värdet   Här: faktorn $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$

I exemplet ovan fås de ensidiga konfidensintervallen till $\left(-\infty,\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_\alpha\right)$ resp $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\lambda_\alpha\right)$