Föreläsning

11

Föreläsning 11

Konf-int för μ när σ är känt

här leddes förra gången $P(|\bar{X}-\mu|<a) = 1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow I_\mu = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Här var $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ $N(0,1)$

om σ är okänt fås $\sigma^* = s$

och $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \in t(n-1)$ se §11.1 d

§12.2 $\Rightarrow$ så $I_\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Berätta om lite löst om t-fördelningen
och frihetsgrader
visa tab 3

1,5

Antag nu att vi vill bilda ett konf-int för μ när σ är okänd och skattas med $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum |x_i - \bar{x}|^2}$

Då har vi jfr när σ är känd och $\underline{X} = X_1 \dots X_n$

$$P\left(-\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{\bar{X}} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Precis som $\dfrac{\bar{\bar{X}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$

gäller att $\dfrac{\bar{\bar{X}} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1)$

där $n-1$ = antal frihetsgrader

~~och där~~ $\cancel{\lim_{n\to\infty} t(n-1)}$

och där $\lim_{f \to \infty} t(f) = N(0,1)$

$$\Rightarrow I_\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(f-1)$$

medelfelet $d(\mu^*) = D^*_{obs}(\mu^*) = D^*_{obs}(\bar{X})$

Normal fördelade stickprov

Ta fram $I_{\mu_1-\mu_2}$ när σ_i kända
§12.1, §11.3

Ta fram $I_{\mu_1-\mu_2}$ när σ_1 och σ_2 okända
och olika §12.3

Ta fram $I_{\mu_1-\mu_2}$ när σ_1 och σ_2 är
lika med σ med okända

§12.2 §11.2

Ta fram konf-int för stickprov i par
aug 2019 uppg 15
och skillnad mellan två stickprov
juni 2019 uppg 15

$\boxed{\text{Om } X_i \text{ inte ej kommer från N fördelning men C.G.S kan användas} \Rightarrow \text{§12.3}}$

Nästa föreläsning

7

~~$P\left(\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 < \chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$~~

$P\left(\sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$

~~$P\left(\sigma > \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right) = \frac{\alpha}{2}$~~

$P\left(\sigma > \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right) = \frac{\alpha}{2}$

~~$I_\sigma = \left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right)$~~

Fall 1) Anta att vi har två stickprov

där X_i:na $\in N(\mu_X, \sigma_X)$ Y_j:na $\in N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Vi vill bilda konf-int för $\mu_X - \mu_Y$ när σ_X och σ_Y är kända

$$\Rightarrow P\left(\lambda_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{D(\bar{X} - \bar{Y})} < \lambda_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$D(\bar{X}-\bar{Y}) = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}$$

$$\Rightarrow I_{\mu_X - \mu_Y} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y}{n_Y}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Om ~~okända σ $\Rightarrow$ §12.3 $\Rightarrow$ $I_{\mu_X - \mu_Y} = \bar{x} - \bar{y}$~~

$$\Rightarrow I_{\mu_X - \mu_Y} = \cancel{\bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}}$$

med ~~approximativ konf-grad $1-\alpha$~~

$\boxed{\text{Fall 2}}$ Antag att vi okända men olika σ_X och σ_Y

$\Rightarrow$ §12.3 vi bildar ett ~~[illegible]~~ konfidensintervall

med approximativ konfidensgrad $1-\alpha$

och får

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}\, \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

$\boxed{\text{Fall 3}}$ Antag att vi har okända men

lika standardavvikelser d.v.s. $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$

då skattar vi σ med s

och får

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(f) < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\underbrace{\sqrt{\frac{S^2}{n_X} + \frac{S^2}{n_Y}}}_{S\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(f)\right) = 1 - \alpha$$

S^2 är en ihopviktad skattning av σ^2

där vi viktar ihop S_X^2 och S_Y^2

och får enl §11.2 b

$$S^2 = \frac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

enl §11.2d fås $f = n_x + n_y - 2$

$$\Rightarrow I_{\mu_x - \mu_y} = \bar{x} - \bar{y} \pm s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x + n_y - 2)$$

där $s^2 = \frac{(n_x - 1) s_x^2 + (n_y - 1) s_y^2}{n_x + n_y - 2}$

$s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad s_y^2 = \frac{1}{n_y - 1} \sum (y_i - \bar{y})^2$

Stickprov i par

Antag att vi har parvisa observationer

där $X_i \in N(\mu_x, \sigma_x)$

och $Y_i \in N(\mu_x + \Delta, \sigma_y)$

och vi vill ha I_Δ

$x_1 \dots \quad x_n$

$y_1 \dots \quad y_n$

Vi gör om till ett stickprov genom att

bilda $z_i = y_i - x_i$ där z_i:na ober

och $N(\Delta, \sigma_z)$

$$\Rightarrow I_\Delta = I_{\mu_z} = \bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

Viktigt att skilja på när vi har stickprov i par och när vi har skillnad mellan 2 stickprovs väntevärden