Statistik för bioteknik SF1911 // KTH Matematisk statistik // Formler och tabeller

Ht 2016

1 Numeriska sammanfattningar (statistikor)

För ett datamaterial $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beräknas

$$\begin{aligned} \text{Stickprovsmedelvärde } \overline{x} &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \\ \text{Stickprovsvarians } s^2 &= \tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \tfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right) \end{aligned}$$

Om a och b konstanter och $y_i = a \cdot x_i + b$, $i = 1, \ldots, n$ så är

$$\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b \qquad s_y^2 = a^2 s_x^2$$

För grupperade data där värdena $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ har relativ frekvens $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ beräknas

$$\mu = \sum_i a_i p_i \qquad \sigma^2 = \sum_i (a_i - \mu)^2 p_i.$$

Tjebychovs olikhet

I ett datamaterial $x_1, \ldots, x_n$ är åtminstone $1 - 1/k^2$ av observationer inom k standardavvikelser från medelvärdet.

2 Grundläggande sannolikhetsteori

2.1 De Morgans lagar

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2.2 Kombinatorik

Antalet sätt som man kan välja k element av n distinkta

	Med återläggning	Utan återläggning
Med Ordningshänsyn	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Utan Ordningshänsyn	$\binom{n+1-k}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

2.3 Räkneregler för sannolikheter

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - PA \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Betingade sannolikheter

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{(definition)} \\
P(A\cap B) &= P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B) \\
P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \quad \text{(lagen om total sannolikhet)}
\end{aligned}$$

Om A och B är oberoende så är

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P(A)P(B) \quad \text{(definition)} \\
P(A|B) &= P(A) \\
P(B|A) &= P(B)
\end{aligned}$$

3 Sannolikhetsfördelningar

3.1 Discrete Distributions

Bernoulli Distribution Let $X \sim \mathcal{B}er\,(p)$. X has two values, usually numerically coded as 0 and 1. The p.m.f. is

$$p_X(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1-p & x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$E\,[X] = p, \mathrm{Var}\,[X] = p(1-p).$$

Discrete Uniform Distribution $X \sim U\,(1, 2, \ldots, n)$, where $n > 1$. The p.m.f. is

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{2}$$

$$E\,[X] = \frac{n+1}{2}, \mathrm{Var}\,[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

Geometric Distribution $0 < p < 1$, $q = 1-p$. The p.m.f. of $X \sim \mathcal{G}e(p)$ is

$$p_X(x) = q^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E\,[X] = \frac{q}{p}, \mathrm{Var}\,[X] = \frac{q}{p^2}.$$

First Success Distribution $X \sim \mathcal{G}eom(p)$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$. The p.m.f. is

$$p_X(x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots.$$

$$E\,[X] = \frac{1}{p}, \mathrm{Var}\,[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Binomial Distribution $X \sim \mathrm{B}in\,(n,p)$, $0 \leq p \leq 1$, $q = 1-p$, and the p.m.f. is

$$p_X(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x q^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n.$$

$$E\left[X\right] = np, \mathrm{Var}\left[X\right] = nqp.$$

Hypergeometric Distribution $X \sim \mathcal{HG}(m,k,n)$, the hypergeometric distribution with parameters (m,k,n) and $x \in \{o, \ldots, \min(n,k)\}$

$$p_X(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{m-k}{n-x}}{\binom{m}{n}}$$

$$E[X] = n\frac{k}{m} \qquad \text{Varians } \mathrm{Var}[X] = \frac{nk}{m}\frac{m-k}{m}\frac{m-n}{m-1}$$

Poisson Distribution $X \sim \mathcal{P}oi(\lambda)$, $\lambda > 0$, then its p.m.f. is

$$p_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$E\left[X\right] = \lambda, \mathrm{Var}\left[X\right] = \lambda.$$

Negative Binomial Distribution X is said to follow the Negative Binomial distribution, $X \sim \mathcal{NB}(n,p)$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, if its p.m.f. is

$$p_X(x) = \left(\begin{array}{c} n+x-1 \\ x \end{array} \right) p^n q^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$E\left[X\right] = n\frac{q}{p}, \mathrm{Var}\left[X\right] = n\frac{q}{p^2}.$$

Obs! $\mathcal{G}e(p) = \mathcal{NB}(1,p)$.

3.2 Continuous Distributions

Uniform Distribution $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, $a < b$ is a random variable with the p.d.f.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{5}$$

$$E\left[X\right] = \frac{a+b}{2}, \mathrm{Var}\left[X\right] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Normal Distribution a.k.a. Gaussian Distribution $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ is a real number, $\sigma > 0$ means that the p.d.f. of X is

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{6}$$

We say that X has a normal distribution or a Gaussian distribution with the parameters μ and σ^2, where

$$E\left[X\right] = \mu, \mathrm{Var}\left[X\right] = \sigma^2.$$

Standard Normal Distribution or Standard Gaussian Distribution The special case $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ of (6) is the standard normal distribution or the standard Gaussian distribution.

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{7}$$

The corresponding distribution function is designated by $\Phi(x)$, i.e.,

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{8}$$

It follows readily that

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \tag{9}$$

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Exponential Distribution $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, and the p.d.f. is

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \le x \\ \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

$$E[X] = \lambda, \mathrm{Var}[X] = \lambda^2.$$

Double exponential Distribution $X \sim \mathcal{DE}(a)$, $a > 0$.

$$f_X(x) = \frac{1}{2a} e^{-|x|/a}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{12}$$

$$E[X] = 0, \mathrm{Var}[X] = 2a^2.$$

$\chi^2(f)$**- Distribution with** f **Degrees of Freedom** The p.d.f. for $f = 1, 2, \ldots$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{f}{2}-1} e^{-x/2}}{\Gamma(f/2) 2^{f/2}} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \le 0, \end{cases}$$

then X is said to be $\chi^2(f)$- distributed with f degrees of freedom. $X \sim \chi^2(f)$. Note that $\chi^2(f) = \Gamma(f/2, 2)$.

$$E[X] = f, \mathrm{Var}[X] = 2f^2.$$

Student's t-distribution If the random variable X has the p.d.f. for $n = 1, 2, \ldots$

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}, -\infty < x < \infty,$$

then X is said to be $t(n)$- distributed with n degrees of freedom. We write $X \sim t(n)$.

$$E[X] = 0, \mathrm{Var}[X] = \frac{n}{n+2}.$$

Beta Distribution The *Beta function* $B(x, y)$ is defined for real $r > 0$ and $s > 0$ as

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} \cdot (1-x)^{s-1} dx = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}. \tag{13}$$

$$\frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_0^1 x^{r-1} \cdot (1-x)^{s-1} dx = 1. \tag{14}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1} \cdot (1-x)^{s-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere}, \end{cases} \tag{15}$$

is a p.d.f. to be called the *Beta density*. We write $X \sim \mathcal{B}e(r, s)$, if X is a random variable that has a Beta density. This p.d.f. plays an important role in Bayesian statistics.

$$E[X] = \frac{r}{r+s}, \mathrm{Var}[X] = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Pareto Distribution A continuous random variable X has the p.d.f.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x > k, \\ 0 & x \leq k, \end{cases} \tag{16}$$

where $k > 0$, $\alpha > 0$, which is called a **Pareto density** with parameters k and α. $X \sim \mathcal{P}a(k, \alpha)$.

$$E[X] = \frac{\alpha k}{\alpha - 1}, \mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha k^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}, \alpha > 2.$$

4 Normalfördelning

Om X är $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ är $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Om X är $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ så är $Y = aX + b \in \mathcal{N}a\mu + b, a^2\sigma^2)$
Om X är $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ och Y är $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ så är $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ om X och Y är oberoende.
Om X är $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ och Y är $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ så är $X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ om X och Y är oberoende.
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende, alla normalfördelade $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ och $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, så är $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

5 Approximationer

$$\mathcal{HG}(N,n,p) \overbrace{\approx}^{n/N\leq 0.1} \mathcal{B}in(n,p) \overbrace{\approx}^{npq\geq 10} \mathcal{N}(np,npq)$$

$$\mathcal{B}in(n,p) \overbrace{\approx}^{p\leq 0.1} \mathcal{P}oi(\underbrace{np}_{=\mu}) \overbrace{\approx}^{\mu\geq 15} \mathcal{N}(\mu,\mu)$$

$$\mathcal{HG}(N,n,p) \overbrace{\approx}^{\frac{N-n}{N-1}np(1-p)\geq 10} \mathcal{N}(np,npq)$$

6 Statistiska skattningar

6.1 Maximum–likelihood–metoden

Låt x_i vara oberoende observationer på X_i, $i = 1, 2, ..., n$, där fördelningen för X_i beror på en okänd parameter θ. Det värde $\widehat{\theta}_{mle}$ som maximerar likeihoodfunktionen $L(\theta)$ (diskreta data)

$$L(\theta) = p_X(x_1;\theta)\cdots p_X(x_n;\theta)$$

(kontinuerliga data)

$$L(\theta) = f_X(x_1;\theta)\cdots f_X(x_n;\theta)$$

kallas **maximum–likelihood–skattningen (ML–skattningen)** av θ.

6.2 Momentmetod

Momentmetoden är en metod för estimering av θ. Vi behöver en ekvation som relaterar ett populationsmoment (t.ex., väntevärde) till θ, som vi vill skatta, t.ex

$$E[X] = g(\theta)$$

Med observationerna tar ett stickprovsmoment den okända populationsmomentets plats och ekvationen löses m.a.p. θ,

$$\bar{x} = g(\theta) \Leftrightarrow \widehat{\theta}_{mm} = g^{-1}(\bar{x}).$$

vilket ger momentskattningen $\widehat{\theta}_{mm}$.

7 Vanliga konfidensintervall och test

7.1 Normalfördelad population. Okänd μ, känd σ

Konfidensintervall

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Test av $\mu = \mu_0$ utnyttjar

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $z \geq z_{\alpha/2}$

7.2 Normalfördelad population. Okänd μ, okänd σ

Konfidensintervall

$$\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

med t-kvantiler ur $t(n-1)$-fördelningen. Test av $\mu = \mu_0$ utnyttjar

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\mu < \mu_0$	$t \leq -t_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$t \geq t_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$t \leq -t_{\alpha/2}$ eller $t \geq t_{\alpha/2}$

Konfidensintervall för σ

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$$

med χ^2-kvantiler ur $\chi^2(n-1)$-fördelningen. Test av $\sigma = \sigma_0$ utnyttjar

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\sigma < \sigma_0$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}$
$\sigma > \sigma_0$	$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$
$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}$ eller $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$

För stora n finns ett approximativt konfidensintervall

$$\frac{s}{1 + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}} \leq \sigma \leq \frac{s}{1 - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}$$

och tillhörande standardnormalfördelade teststorhet $z = \frac{s-\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{2n}}$.

7.3 Normalfördelade populationer. Okända μ_1, μ_2, kända σ_1, σ_2

Konfidensintervall för skillnader $\mu_1 - \mu_2$

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Test av $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ utnyttjar

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$z \leq -z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$z \geq z_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $z \geq z_{\alpha/2}$

7.4 Normalfördelade populationer. Okända μ_1, μ_2, okänd $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

Konfidensintervall för skillnader $\mu_1 - \mu_2$

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

med t-kvantiler ur $t(n_1 + n_2 - 2)$-fördelningen. Test av $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ utnyttjar

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \delta}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \; s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$t \leq -t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 > \delta$	$t \geq t_\alpha$
$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$t \leq -t_{\alpha/2}$ eller $t \geq t_{\alpha/2}$

7.5 Två stickprov

$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ från $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ respektive $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ från $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$, konfidensgrad α.

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_\alpha \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}, \text{ om } \sigma_1, \sigma_2 \text{ kända}$$

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{(\alpha, n_1+n_2-2)} s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2} \text{ om } \sigma_1, \sigma_2 \text{ okända men lika}$$

där $s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ och där s_1^2 och s_2^2 är stickprovsvarianserna i de två stickproven.

7.6 Stickprov i par

Antag att man vill jämföra två metoder på ett antal prov som har helt *olika* värden. På varje prov görs en analys med var och en av metoderna. Vi antar att skillnaden mellan de två metodernas resultat har samma förväntade värde, oavsett prov. Data:

Prov	1	2	3	...	n
Metod 1	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Metod 2	y_1	y_2	y_3	...	y_n
Skillnad	z_1	z_2	z_3	...	z_n

Här är alltså $z_i = x_i - y_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Antag att den konstanta förväntade skillnaden är Δ. Det är då inte så svårt att visa att z-observationerna är normalfördelade med förväntat värde Δ, och att testa om metoderna är likvärdiga, d.v.s. om $\Delta = 0$, kan vi göra utgående från z-data. Vi har återfört problemet till fallet ett stickprov. Hypotesen $\Delta = 0$ förkastas om 0 inte tillhör intervallet $\bar{z} \pm t_{\alpha,n-1} s/\sqrt{n}$ eller om $| t |> t_{\alpha,n-1}$ där $t = \frac{\bar{z}}{s_z/\sqrt{n}}$.

7.7 Normalfördelade populationer. Okända μ_1, μ_2, okända σ_1, σ_2

Test av $\sigma_1 = \sigma_2$ utnyttjar

Alternativhypotes	Teststorhet, F	Förkastelseområde
$\sigma_1 < \sigma_2$	s_2^2/s_1^2	$F \geq F_\alpha(n_2-1, n_1-1)$
$\sigma_1 > \sigma_2$	s_1^2/s_2^2	$F \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$
$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\max(\frac{s_2^2}{s_1^2}, \frac{s_1^2}{s_2^2})$	$F \geq F_{\alpha/2}$

7.8 Andelar i oändliga populationer

Approximativt konfidensintervall för p utnyttjar $\hat{p} = x/n$ och

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Test av $p = p_0$ utnyttjar

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$p < p_0$	$z \leq -z_\alpha$
$p > p_0$	$z \geq z_\alpha$
$p \neq p_0$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $z \geq z_{\alpha/2}$

Approximativt konfidensintervall för skillnad $p_1 - p_2$ utnyttjar

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

Test av $p_1 = p_2$ utnyttjar

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \quad \hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$p_1 < p_2$	$z \leq -z_\alpha$
$p_1 > p_2$	$z \geq z_\alpha$
$p_1 \neq p_2$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $z \geq z_{\alpha/2}$

8 Kontigenstabeller, Homogenitetstest, χ^2-test av fördelning

Med observationer x_{ij} på tabellform

					Rad-summa
	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1r}	n_1
	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2r}	n_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_{s1}	x_{s2}	$\cdots$	x_{sr}	n_s
Kolumnsumma	m_1	m_2	$\cdots$	m_r	N

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(x_{ij} - \frac{n_i m_j}{N})^2}{\frac{n_i m_j}{N}}$$

8.1 Homogenitetstest

En hypotes om samma kolumnfördelning över s kategorier i r mätserier förkastas om $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ med χ^2_α från $\chi^2((r-1)(s-1))$-fördelning.

8.2 Kontigenstabell

En hypotes om oberoende mellan rader och kolonner förkastas om $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ med χ^2_α från $\chi^2((r-1)(s-1))$-fördelning.

8.3 χ^2-test av fördelning

En hypotes om fördelningen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ över s kategorier i r mätserier förkastas om $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ där

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(x_{ij} - m_j p_i)^2}{m_j p_i}$$

och χ^2_α hämtas ur från $\chi^2((s-1)r)$-fördelning.

9 Korrelation

Datamaterial $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
Korrelationskoefficient för stickprov betecknas r och för populationer med ρ. Båda beräknas enligt

$$r_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx} \cdot s_{yy}}}$$

där

$$s_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad s_{yy} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 \quad s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Ett approximativt test av $\rho = \rho_0$ utnyttjar

$$z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \cdot \ln\left(\frac{(1+r)(1-\rho_0)}{(1-r)(1+\rho_0)}\right).$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\rho < \rho_0$	$z \leq -z_\alpha$
$\rho > \rho_0$	$z \geq z_\alpha$
$\rho \neq \rho_0$	$z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $z \geq z_{\alpha/2}$

10 Regression

Modell: $Y = \alpha + \beta x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Datapunkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
Skattningar:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}, \quad \widehat{\alpha} = \bar{y} - \widehat{\beta}\bar{x}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y})^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i\right)^2 / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-2}$$

där $\widehat{y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_i$. t-kvantiler ur $t(n-2)$-fördelningen.
Följande algebraiska likhet gäller: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$

Test av $\alpha = \alpha_0$ utnyttjar

$$t = \frac{\widehat{\alpha} - \alpha_0}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\alpha < \alpha_0$	$t \leq -t_\alpha$
$\alpha > \alpha_0$	$t \geq t_\alpha$
$\alpha \neq \alpha_0$	$t \leq -t_{\alpha/2}$ eller $t \geq t_{\alpha/2}$

med t-kvantiler ur $t(n-2)$-fördelningen. Test av $\beta = \beta_0$ utnyttjar

$$t = \frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\beta < \beta_0$	$t \leq -t_\alpha$
$\beta > \beta_0$	$t \geq t_\alpha$
$\beta \neq \beta_0$	$t \leq -t_{\alpha/2}$ eller $t \geq t_{\alpha/2}$

Konfidensintervall med konfidensgrad p:

$$\alpha : \widehat{\alpha} \pm t_{(p,n-2)} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad \beta : \ \widehat{\beta} \pm t_{(p,n-2)} s \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\alpha + \beta x_0 : \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0 \pm t_{(p,n-2)} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Konfidensintervall för okänt x_0 vid observerat y_0 (konfidensgrad approximativt lika med p):

$$\widehat{x}_0 \pm t_{(p,n-2)} \frac{s}{\widehat{\beta}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\widehat{x}_0 - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}$$

där $\widehat{x}_0 = (y_0 - \widehat{\alpha})/\widehat{\beta}$.

Konfidensintervall för $\alpha + \beta x_0$

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0 - t_{\alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}} \leq \alpha + \beta x_0 \leq \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0 + t_{\alpha/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}}$$

med t-kvantiler ur $t(n-2)$-fördelningen. Test av $\alpha + \beta x_0 = \mu_0$ utnyttjar

$$t = \frac{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} x_0 - \mu_0}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}.$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\alpha + \beta x_0 < \mu_0$	$t \leq -t_\alpha$
$\alpha + \beta x_0 > \mu_0$	$t \geq t_\alpha$
$\alpha + \beta x_0 \neq \mu_0$	$t \leq -t_{\alpha/2}$ eller $t \geq t_{\alpha/2}$

Konfidensintervall för σ

$$\sqrt{\frac{(n-2)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-2)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$$

med χ^2-kvantiler ur $\chi^2(n-2)$-fördelningen. Test av $\sigma = \sigma_0$ utnyttjar

$$\chi^2 = \frac{(n-2)s^2}{\sigma_0^2}$$

Alternativhypotes	Förkastelseområde
$\sigma < \sigma_0$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}$
$\sigma > \sigma_0$	$\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$
$\sigma \neq \sigma_0$	$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}$ eller $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$

10.1 Variansanalys

10.2 Variansanalystabell, ensidig indelning

y_{ij} är j:te data från stickprov nummer i, $i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n_i$. Totala antalet data är $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Variationskälla	Frihetsgrader	Kvadratsumma	Medelkvadratsumma
Mellan stickprov	$k-1$	$\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	kvs/fg
Inom stickprov	$N-k$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$\widehat{\sigma}^2$=kvs/fg
Totalt	$N-1$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	

$\widehat{\sigma}^2$ kan beräknas som viktat medelvärde av stickprovsvarianserna, $\widehat{\sigma}^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2+\cdots+(n_k-1)s_k^2}{N-k}$.

10.3 Variansanalystabell, tvåsidig indelning, r A-nivåer och s B-nivåer en obs/cell

y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots, s$, är observation från nivåkombination A_iB_j som antas vara $\mathrm{N}(a_i + b_j, \sigma^2)$, additiv modell.

Variationskälla	Frihetsgrader	Kvadratsumma	Mkvs
Mellan rader (A)	$r-1$	$s\sum_{i=1}^{r}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	kvs/fg
Mellan kolumner (B)	$s-1$	$r\sum_{j=1}^{s}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$	kvs/fg
Residual	$(r-1)(s-1)$	$\sum_i\sum_j(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$	$\widehat{\sigma}^2$=kvs/fg
Totalt	$rs-1$	$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	

Variansanalystabell, tvåsidig indelning, n obs/cell

y_{ijk}, $i = 1, 2, \ldots, r,\ j = 1, 2, \ldots, s,\ k = 1, 2, \ldots, n$, är k:te observationen från nivåkombination $A_i B_j$ som antas vara $\mathrm{N}(\mu_{ij}, \sigma^2)$.

Variationskälla	Frihetsgrader	Kvadratsumma	Mkvs
Mellan rader	$r-1$	$sn \sum_{i=1}^{r} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	kvs/fg
Mellan kolumner	$s-1$	$rn \sum_{j=1}^{s} (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$	kvs/fg
Samspel	$(r-1)(s-1)$	$n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2$	kvs/fg
Inom celler=Residual	$rs(n-1)$	$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	$\widehat{\sigma}^2$=kvs/fg
Totalt	$rsn-1$	$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$	

$\widehat{\sigma}^2$ kan beräknas som medelvärdet av stickprovsvarianserna inom celler.

Variansanalystabell, 2^2-försök, n observationer per cell

Variationskälla	Frihetsgrader	Kvadratsumma	Mkvs
Huvudeffekt T	1	$2^2 n \widehat{T}^2$	=Kvs
Huvudeffekt K	1	$2^2 n \widehat{K}^2$	=Kvs
Samspel TK	1	$2^2 n \widehat{TK}^2$	=Kvs
Inom celler=Residual	$2^2(n-1)$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	$\widehat{\sigma}^2$=Kvs/fg
Totalt	$2^2 n - 1$	$\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$	

$\widehat{\sigma}^2$ kan beräknas som medelvärdet av stickprovsvarianserna för försökspunkterna. Om $n = 1$ försvinner residualraden.

Variansanalystabell, 2^3-försök, n observationer per cell

Variationskälla	Frihetsgrader	Kvadratsumma	Mkvs
Huvudeffekt A	1	$2^3 n \widehat{A}^2$	=Kvs
Huvudeffekt B	1	$2^3 n \widehat{B}^2$	=Kvs
Huvudeffekt C	1	$2^3 n \widehat{C}^2$	=Kvs
Samspel AB	1	$2^3 n \widehat{AB}^2$	=Kvs
Samspel AC	1	$2^3 n \widehat{AC}^2$	=Kvs
Samspel BC	1	$2^3 n \widehat{BC}^2$	=Kvs
Samspel ABC	1	$2^3 n \widehat{ABC}^2$	=Kvs
Inom celler=Residual	$2^3(n-1)$	$\sum \sum \sum \sum (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2$	$\widehat{\sigma}^2$=Kvs/fg
Totalt	$2^3 n - 1$	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_r (y_{ijkl} - \bar{y}_{....})^2$	

Om $n = 1$ försvinner residualraden.
$\widehat{\sigma}^2$ kan beräknas som medelvärde av stickprovsvarianserna för försökspunkterna.

I 2^k-försök kan kvadratsummor för försumbara effekter användas för σ^2-skattningen: Addera kvadratsummor för försumbara effekter och residualkvadratsumman samt dividera med summan av antalet frihetsgrader.

Konfidensintervall för effekt: effektskattning $\pm t_{(\alpha,f)} \widehat{\sigma} / \sqrt{2^k n}$ där f är antalet frihetsgrader i σ^2-skattningen.

Variansanalystabell för 2^k-försök och reducerade försök fås på analogt sätt. I reducerade försök blir effekterna kopplade.

Effektskattningarna i fullståndiga och reducerade 2^k-försök beräknas utifrån data och teckenschema och med divisorn $2^k n$ eller utifrån cellmedelvärdena och teckenschema med divisorn 2^k.

Teckentabell 3 faktorer

I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
+	−	−	+	−	+	+	−
+	+	−	−	−	−	+	+
+	−	+	−	−	+	−	+
+	+	+	+	−	−	−	−
+	−	−	+	+	−	−	+
+	+	−	−	+	+	−	−
+	−	+	−	+	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+	+

Skattningar av effekter fås genom att bilda medelvärden av data med tecken enligt tabell.

F-fördelningens kvantiler 5 % signifikansnivå

f_2/f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245
2	18.5	19	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.7	4.68	4.66	4.64
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.1	4.06	4.03	4	3.98	3.96
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.6	3.57	3.55	3.53
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.5	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.1	3.07	3.05	3.03
10	4.96	4.1	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.2	3.09	3.01	2.95	2.9	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3	2.91	2.85	2.8	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.6	2.58	2.55
14	4.6	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.7	2.65	2.6	2.57	2.53	2.51	2.48
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.9	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.4	2.37
17	4.45	3.59	3.2	2.96	2.81	2.7	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29
19	4.38	3.52	3.13	2.9	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26
20	4.35	3.49	3.1	2.87	2.71	2.6	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22
24	4.26	3.4	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.3	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2	1.97	1.95
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.4	2.29	2.2	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89
60	4	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.1	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82
100	3.94	3.09	2.7	2.46	2.31	2.19	2.1	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79

f_2/f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100
1	246	246	247	247	248	248	249	250	251	252	252	253	253
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.7	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55
4	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.8	5.77	5.75	5.72	5.7	5.69	5.67	5.66
5	4.62	4.6	4.59	4.58	4.57	4.56	4.53	4.5	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41
6	3.94	3.92	3.91	3.9	3.88	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71
7	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.3	3.29	3.27
8	3.22	3.2	3.19	3.17	3.16	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97
9	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.9	2.86	2.83	2.8	2.79	2.77	2.76
10	2.85	2.83	2.81	2.8	2.79	2.77	2.74	2.7	2.66	2.64	2.62	2.6	2.59
11	2.72	2.7	2.69	2.67	2.66	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46
12	2.62	2.6	2.58	2.57	2.56	2.54	2.51	2.47	2.43	2.4	2.38	2.36	2.35
13	2.53	2.51	2.5	2.48	2.47	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.3	2.27	2.26
14	2.46	2.44	2.43	2.41	2.4	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.2	2.19
15	2.4	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.29	2.25	2.2	2.18	2.16	2.14	2.12
16	2.35	2.33	2.32	2.3	2.29	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07
17	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.19	2.15	2.1	2.08	2.06	2.03	2.02
18	2.27	2.25	2.23	2.22	2.2	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98
19	2.23	2.21	2.2	2.18	2.17	2.16	2.11	2.07	2.03	2	1.98	1.96	1.94
20	2.2	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91
24	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.8
30	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.7
40	1.92	1.9	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59
50	1.87	1.85	1.83	1.81	1.8	1.78	1.74	1.69	1.63	1.6	1.58	1.54	1.52
60	1.84	1.82	1.8	1.78	1.76	1.75	1.7	1.65	1.59	1.56	1.53	1.5	1.48
80	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.7	1.65	1.6	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43
100	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39

F-fördelningens kvantiler 1 % signifikansnivå

f_2/f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6106	6126	6143
2	98.5	99	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	27	26.9
4	21.2	18	16.7	16	15.5	15.2	15	14.8	14.7	14.5	14.5	14.4	14.3	14.2
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	9.82	9.77
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.6
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01
10	10	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.6
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.4	4.34	4.29
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.22	4.16	4.1	4.05
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	4.02	3.96	3.91	3.86
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.8	3.75	3.7
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.89	3.8	3.73	3.67	3.61	3.56
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.5	3.45
17	8.4	6.11	5.18	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.4	3.35
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.6	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27
19	8.18	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.3	3.24	3.19
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.89	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.73	2.66	2.61	2.56
50	7.17	5.06	4.2	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.7	2.62	2.56	2.51	2.46
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.5	2.44	2.39
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31
100	6.9	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.5	2.43	2.37	2.31	2.27

f_2/f_1	15	16	17	18	19	20	24	30	40	50	60	80	100
1	6157	6170	6181	6192	6201	6209	6235	6261	6287	6304	6314	6327	6335
2	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	26.9	26.8	26.8	26.8	26.7	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.3	26.2
4	14.2	14.2	14.1	14.1	14	14	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6
5	9.72	9.68	9.64	9.61	9.58	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.2	9.16	9.13
6	7.56	7.52	7.48	7.45	7.42	7.4	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	7.01	6.99
7	6.31	6.28	6.24	6.21	6.18	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.78	5.75
8	5.52	5.48	5.44	5.41	5.38	5.36	5.28	5.2	5.12	5.07	5.03	4.99	4.96
9	4.96	4.92	4.89	4.86	4.83	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.44	4.41
10	4.56	4.52	4.49	4.46	4.43	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.04	4.01
11	4.25	4.21	4.18	4.15	4.12	4.1	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.73	3.71
12	4.01	3.97	3.94	3.91	3.88	3.86	3.78	3.7	3.62	3.57	3.54	3.49	3.47
13	3.82	3.78	3.75	3.72	3.69	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.3	3.27
14	3.66	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.14	3.11
15	3.52	3.49	3.45	3.42	3.4	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	3	2.98
16	3.41	3.37	3.34	3.31	3.28	3.26	3.18	3.1	3.02	2.97	2.93	2.89	2.86
17	3.31	3.27	3.24	3.21	3.19	3.16	3.08	3	2.92	2.87	2.83	2.79	2.76
18	3.23	3.19	3.16	3.13	3.1	3.08	3	2.92	2.84	2.78	2.75	2.7	2.68
19	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.63	2.6
20	3.09	3.05	3.02	2.99	2.96	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.56	2.54
24	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.4	2.36	2.33
30	2.7	2.66	2.63	2.6	2.57	2.55	2.47	2.39	2.3	2.25	2.21	2.16	2.13
40	2.52	2.48	2.45	2.42	2.39	2.37	2.29	2.2	2.11	2.06	2.02	1.97	1.94
50	2.42	2.38	2.35	2.32	2.29	2.27	2.18	2.1	2.01	1.95	1.91	1.86	1.82
60	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.2	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.78	1.75
80	2.27	2.23	2.2	2.17	2.14	2.12	2.03	1.94	1.85	1.79	1.75	1.69	1.65
100	2.22	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	1.98	1.89	1.8	1.74	1.69	1.63	1.6