SF1920/SF1921 Sannolikhetsteori och statistik 6,0 hp
Föreläsning 1
Mängdlära
Grundläggande sannolikhetsteori
Kombinatorik
Deskriptiv statistik

Jörgen Säve-Söderbergh

Information om kursen

Kom ihåg att registrera er!

- Gunnar Blom, *Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar*, sjätte upplagan.
- Kursen har en hemsida där ni finner information.

Examination

- Skriftlig tentamen bestående av sex uppgifter och skrivningstiden är fem timmar. Varje uppgift är värd 10 poäng. För betyget E krävs 24 poäng.
- De som erhåller 22 eller 23 poäng kommer att ges möjlighet att komplettera.

Bonuspoäng, Möjligheten att få ett högre betyg

Det finns två sätt att förtjäna bonuspoäng under kursen:

- Kontrollskrivning 7 februari (4 bonuspoäng)
- Datorlaboration (3 bonuspoäng)
    - Laboration 1 – introduktion till Matlab
    - Laboration 2 – demonstrationsföreläsning
    - Laboration 3 – poänggivande laboration

Det är möjligt att tentera kursen flera gånger även om du är godkänd.

Kursens innehåll

- Sannolikhetsteori (kapitel 1-7)
- Statistikteori (kapitel 9, 11-13)

Kapitel 10 handlar om *beskrivande statistik*.

Kapitel 8 handlar om slumptal och simulering – det möter ni under laborationerna.

Deskriptiv statistik

Kapitel 10 handlar om *deskriptiv* statistik.

Om vi gör observationer utan att förutsätta att de har tillhandahållits av en *modell*, samt beräknar sammanfattande mått, så ägnar vi oss åt beskrivande statistik.

Beskrivande statistik har ni mött tidigare i skolan.

Stickprovsmedelvärdet

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

och **standardavvikelsen**

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}.$$

Modeller inom vetenskapen och övrigt

Modeller kan vara

- Fysiska modeller (modelltåg)
- Analoga modeller (kartor, ritningar)
- Abstrakta modeller

Vi sysslar med **abstrakta** modeller.

Abstrakta modeller är av två olika slag

- Deterministiska modeller
  - Euklidisk geometri
- Stokastiska modeller (slumpmodeller)
  - Vårt ämne

Skilj på modellen och verkligheten.

George E.P. Box

Alla modeller är fel, men en del av dem är användbara.

Slumpmässigt försök, utfall

Ett **slumpmässigt försök** är ett försök som kan upprepas och där utfallet ej kan förutsägas.

Vi kan beskriva alla möjliga **utfall** av ett slumpmässigt försök med en mängd som betecknas Ω

Mängden Ω kallas **utfallsrummet**.

Singla en slant. Två möjliga utfall: krona och klave.
$\Omega = \{\mathrm{Krona}, \mathrm{Klave}\}$.

Kasta en tärning. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mät livslängden för en bil.

$$\Omega = [0, \infty).$$

Utfallsrummet Ω

De naturliga talen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ kan räknas upp.

Deras antal är uppräkneligt oändligt.

Om antalet utfall är ändligt eller uppräkneligt oändligt säges Ω vara ett *diskret* utfallsrum.

De reella talen $\mathbb{R}$ kan inte räknas upp, de säges vara överuppräkneliga.

Om antalet utfall icke är ändligt eller uppräkneligt oändligt säges Ω vara ett *kontinuerligt* utfallsrum.

Slumpmässigt försök: kasta en tärning

En delmängd i utfallsrummet Ω kallas en **händelse**.

Kasta en tärning. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. Vi är intresserade av ett *jämnt* resultat.

Denna händelse motsvaras av delmängden

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

«Minst en trea» motsvaras av

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Om vi kastar en tärning och utfallet är 4, så säger vi att A har inträffat, eftersom $4 \in A$. (Även B inträffar!)

Operationer på händelser

Med hjälp av mängdalgebra kan vi uttrycka fler händelser.

$A \cup B$ = händelsen att minst en av A och B inträffar.

$A \cap B$ = händelsen att både A och B inträffar.

A^* = händelsen att A ej inträffar.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ händelserna A och B är disjunkta/oförenliga.

Beskriv händelsen

$$(A \cap B^*) \cup (A^* \cap B)$$

Slumpmässigt försök: kasta en tärning

$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$.

$A = \text{jämnt resultat} = \{2, 4, 6\}$

$B = \text{Minst en trea} \; = \{3, 4, 5, 6\}$.

$A \cup B = \{\text{Antingen jämnt resultat eller minst tre}\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

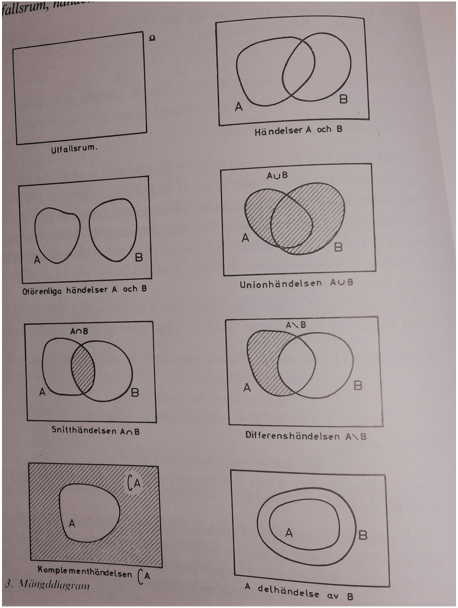
$A \cap B = \{\text{Både jämnt resultat och minst tre}\} = \{4, 6\}$

$A^* = \{\text{Inte jämnt resultat}\} = \{\text{Udda resultat}\} = \{1, 3, 5\}$

$B^* = \{\text{Högst två}\} = \{1, 2\}$

$(A \cup B)^* = A^* \cap B^* = \{\text{Både udda och högst två}\} = \{1\}$

Händelser kan illustreras med Venn-Diagram



Vad är sannolikhet? Relativ frekvens.

Antag att vi upprepar ett slumpmässigt försök n gånger.

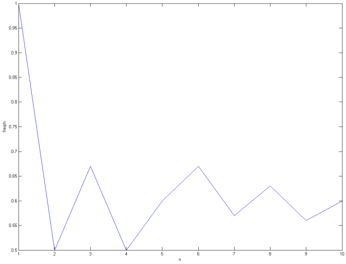
För ett visst utfall kan vi beräkna den *relativa frekvensen*.

$$\frac{\text{antal gånger som}}{n}$$

Upprepat slumpmässigt försök med enkrona tio gånger

Vi fokuserar på utfallet krona (den sida av myntet med kungen på).

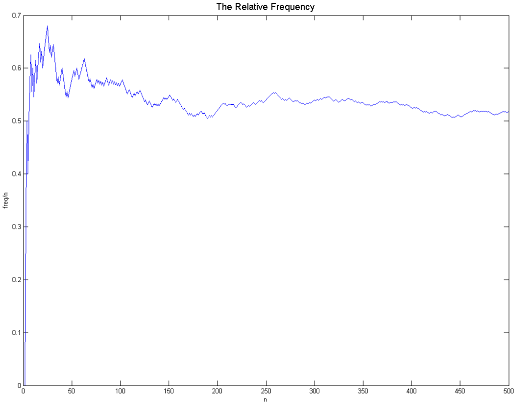
Försök	Utfall	Frekvens	
1	Kr	1	1
2	Kl	1	0.50
3	Kr	2	0.67
4	Kl	2	0.50
5	Kr	3	0.60
6	Kr	4	0.67
7	Kl	4	0.57
8	Kr	5	0.63
9	Kl	5	0.56
10	Kr	6	0.60



Den sista kolumnen innehåller de relativa frekvenserna.

500 slumpmässiga försök med en enkrona

Den relativa frekvensen illustreras nedan.



Detta experiment bekräftar ett teoretiskt resultat som är känt som **stora talens lag**.

Matematiska spelregler för sannolikhet. Kolmogorovs axiomsystem (1933).

Ett *sannolikhetsmått* $P(\cdot)$ är en reellvärd funktion vars argument är mängder.

Om A är en händelse, så anger talet $P(A)$ dess sannolikhet.

Nedanstående axiom måste vara uppfyllda för $P(\cdot)$

Axiom 1. För varje händelse A gäller att $0 \leq P(A) \leq 1$.

Axiom 2. För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$.

Axiom 3. If $A_1, A_2, \cdots$ är en ändlig eller uppräkneligt oändlig följd av parvis oförenliga händelser gäller att

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Antag att Ω har ett ändligt antal utfall

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}.$$

Vi önskar att samtliga utfall ska ha samma sannolikhet.

Eftersom vi har m utfall måste

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Vid likformigt sannolikhetsmått är sannolikheten för en händelse lika med kvoten mellan antalet för händelsen gynnsamma fall och antalet möjliga fall.

$$P(A) = \frac{\text{antal gynnsamma utfall för } A}{\text{det totala antalet möjliga utfall}}.$$

Antalet möjliga utfall är 36:

$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),\ldots,(6,6).$

Alla utfall är lika sannolika.

A är 'summan av ögonen är högst 3'.

De gynnsamma utfallen är

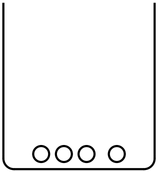
$$(1,1),(1,2),(2,1).$$

Alltså är sannolikheten för A $3/36 = 0.083$.

Vi föreställer oss en urna. Vi skiljer på

- Dragning **med** återläggning
- Dragning **utan** återläggning

Vi skiljer även på om vi tar hänsyn till ordningen eller inte.



Antalet sätt att välja n element ur en given mängd av N element

	Med återläggning	Utan återläggning
Med hänsyn till ordning	N^n	$N(N-1)\cdots(N-n+1)$
Utan hänsyn till ordning	$\binom{N+n-1}{n}$	$\binom{N}{n}$

Dragning av n kulor UTAN återläggning från en urna som innehåller två olika föremål

Antag att urnan innehåller v vita kulor och s svarta kulor.

Drag n kulor utan återläggning.

Vad är sannolikheten att det bland de n uttagna kulorna återfinns exakt k vita kulor?

$$\frac{\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}}$$

Dragning av n kulor MED återläggning från en urna som innehåller två olika föremål

Återigen v vita kulor och s svarta kulor.

Drag n kulor med återläggning. – Vad är sannolikheten att det

bland de n uttagna kulorna återfinns exakt k vita kulor?

$$\frac{\binom{n}{k} v^k s^{n-k}}{(v+s)^n}$$