SF1920/SF1921 Sannolikhetsteori och statistik 6,0 hp
Föreläsning 2
Betingad sannolikhet
Oberoende händelser

Jörgen Säve-Söderbergh

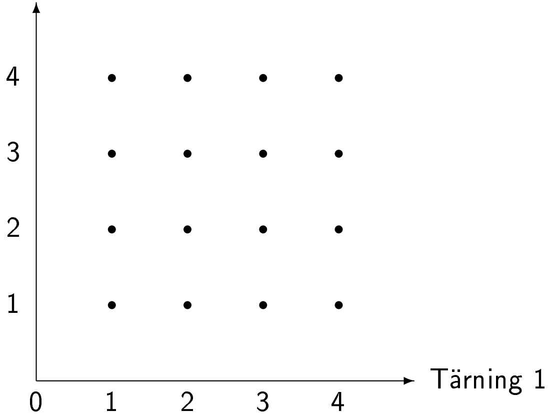
Betingad sannolikhet

Hur påverkas sannolikheten för en händelse A om vi vet att en annan händelse B redan har inträffat?

Att B har inträffat betyder att utfallsrummet har förändrats.

Sexton möjliga utfall för försöket. Vi är intresserade av summan av ögonen.

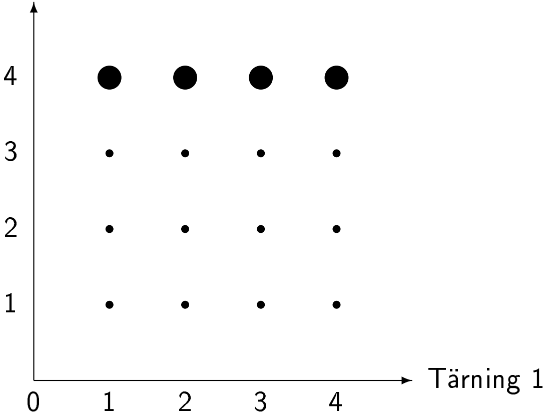
Vad är (den betingade) sannolikheten att summan av ögonen blev sex givet att den andra tärningen blev en fyra?



Den andra tärningen blev en fyra

Under denna förutsättning kan summan av ögonen bli sex på endast ett sätt. $(2 + 4 = 6)$

Det finns en möjlighet bland fyra möjliga, alltså är sannolikheten 1/4.



Kan vi finna en lämplig definition?

Vi ger de diskuterade händelserna namn.

$$A = \{\text{summan av ögonen är sex}\} = \{(2,4),(3,3),(4,2)\}$$

$$B = \{\text{andra tärningen fyra}\} = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$$

$$A \cap B = \{\text{summan sex och andra fyra}\} = \{(2,4)\}$$

Vi betecknar den betingade sannolikheten för A givet B som $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\frac{16}{16} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definition av betingad sannolikhet. Anmärkningar

Den *betingade sannolikheten* för en händelse A, givet att händelsen B har inträffat definieras som

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

under förutsättning att $P(B) > 0$.

När B har inträffat så har vi ett nytt utfallsrum.

Det finns situationer då vi önskar betinga på en händelse B som *eventuellt* kan ha sannolikheten noll. Mer avancerat begrepp om betingad sannolikhet.

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Definition av betingad sannolikhet. Anmärkningar

Om $P(B) > 0$ så uppfyller $P(A|B)$ Kolmogorovs axiom.

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, om A_1 och A_2 är disjunkta.

Alltså gäller våra vanliga regler, t ex

$$P(A^*|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$$

En urna med tre röda klot och ett blått

En urna med tre röda klot och ett blått.

Två klot väljs på måfå utan återläggning.

Vad är sannolikheten att de bägge utvalda kloten är röda?

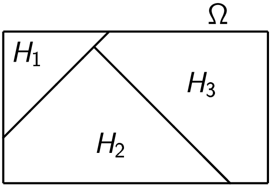
Vad är sannolikheten att ett rött klot blir utvalt vid den andra dragningen?

Om det andra uttagna klotet är rött, vad är sannolikheten att det första klotet är blått?

Lagen om total sannolikhet

Låt $H_1, H_2, \ldots, H_n$ utgöra en partition med n delmängder av utfallsrummet Ω.

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n \quad \text{och} \quad H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j.$$



Antag att varje H_i har en positiv sannolikhet; $P(H_i) > 0$.

Varje händelse A kan i denna situation skrivas;

$$A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_n \cap A).$$

Lagen om total sannolikhet

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_n \cap A)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A) \quad \text{(händelserna } H_i \cap A \text{ är disjunkta)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i). \quad \text{(betingad sannolikhet)} \end{aligned}$$

Därmed har vi bevisat

Theorem

Om händelserna $H_1, H_2, \ldots, H_n$ är parvis oförenliga och $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$, dvs att i ett försök inträffar precis en av dem, gäller för varje händelse A att

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i).$$

Genom definitionen av betingad sannolikhet kan vi skriva

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

I nämnaren kan vi använda $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$

Theorem

(Bayes sats) Om händelserna $H_1, H_2, \ldots, H_n$ är disjunkta och har positiva sannolikheter, samt utfyller hela Ω, så gäller för varje händelse A

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Oberoende händelser

Vanligtvis är $P(B|A) \neq P(B)$, i speciella fall $P(B|A) = P(B)$.

Om A inträffar påverkas inte sannolikheten att B inträffar.

Då kallas A och B för oberoende händelser.

Det medför att

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

Detta tar vi som definition.
Händelserna A och B säges vara **oberoende** om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

I annat fall är A och B beroende.

Theorem

If A and B är oberoende händelser, så är även följande par av händelser oberoende:

(a) A *and* B^*.

(b) A^* *and* B.

(c) A^* *and* B^*.

Observation Begreppen oförenliga händelser och oberoende händelser är ej samma sak.

Oberoende händelser

Antag att vi kastar två tärningar.

Låt

$A = \text{summan av ögonen är sex}, \qquad B = \text{den första tärningen blir fyra}.$

$$P(A \cap B) = P(\{4, 2\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)\,P(B) = \frac{5}{36}\frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

A och B är inte oberoende.