SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 10
Statistikteori – konsten att dra slutsatser. Intervallskattning.

Tatjana Pavlenko

20 april 2018

KTH Matematik

Plan för dagens föreläsning

- Statistisk inferens – oversikt (rep.)
- Punktskattningar (rep.)
- Intervallskattning (Kap. 12.2)
- Exempel i situationer med normalfördelade data: intervall för väntevärde när standardavvikelsen är känd resp. okänd. (Kap. 12.3)

Statistisk inferens – konsten att dra slutsatser (rep.)

- Sannolikhetsteorin: Hur beskriver man slumpen med hjälp av sannolikhetsmodell?
- Statistikteorin: Vilka slutsatser kan man dra av ett datamaterial?
  - Vi har skaffat oss ett stickprov av observationer $x_1, \dots, x_n$ av oberoende s.v. $X_1, \dots, X_n$ genom experiment. Fördelningen för X beror av en *okänd parameter*, θ.
  - Vi vill uttnyttja stickprovet (data) för att uppskatta fördelningsparameter θ.
- Exempel:
  1. Uppskatta medelhastigheten hos hela populationen bilar som passerar korsningen: $\theta = \mu = E(X)$.
     X_i är hastighet hos bil i. Data: $x_1 = 65, x_2 = 50, \dots, x_{78} = 56$.

  2. Hur stor är den förväntade andelen fortkörare?
     $\theta = p = P(X > 50)$. Data: $y = 41$.

KTH VETENSKAP OCH KONST

KTH Matematik

Statistisk inferens – översikt (rep.)

- Punktskattning:

  Hur gör man en bra uppskattning av en okänd storhet (parametervärde)?
  Hur vet man att uppskattningen är bra?

- Intervallskattning:

  Bestämma istället ett intervall som innehåller det sanna (verkliga) parametervärdet med givet (stor) sannolikhet, t ex 0.95.

- Hypotesprövning:

  Om uppskattningen blev 0.013, kan det sanna parametervärdet ändå vara 0.01?

KTH Matematik

PUNKTSKATTNING: (REP.)

- Forts. på exempel. *Modell:* Vi har X_i som hastighet hos bil i där $E(X_i) = \mu$ och $V(X_i) = \sigma$. Alla X_i antas vara oberoende och lika fördelade för $i = 1, \ldots, n$ där $n = 78$. Om vi dessutom antar att X_i är normalfördelade ska det också anges: $X_i \in N(\mu, \sigma)$, X_i är oberoende för $i = 1, \ldots, n$, $n = 78$.
- Vi skattar fördelningsparametern θ med hjälp av någon lämplig funktion $\theta^*(x)$ av stickprovet $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
  $\theta^*(x)$ (ofta skrivs som $\theta^*_{obs}(x)$) kallas för en *skattning av* θ.
- Funktionen $\theta^*(X)$ av motsvarande stokastiska variabler $X = (X_1, \ldots, X_n)$ kallas för *skattare av* θ. $\theta^*(X)$ är också en stokastisk variabel med t. ex. fördelning, väntevärde och varians.
- Skilj på θ som är en parameter, dvs okänt tal, och θ^* som är dess skattning. Skattningen varierar med stickprovet, det gör inte θ!
- *Tokning:* Fördelning för $\theta^*(X)$ talar om vad skattningen kunde blivit istället, om vi gjort om experiment, t ex mäter hastighet hos 78 nya bilar.

EGENSKAPER HOS PUNKTSKATTNINGAR (REP.)

- Önskvärda egenskaper. En skattare bör vara
  - väntevärdesriktig, (*skattar den rätt sak?*). $E(\theta^*(X)) = \theta$,
  - effektiv, (*hur osäker den är?*). $V(\theta^*(X))$ är så liten som möjligt, och
  - konsistent, dvs $P(|\theta_n^* - \theta| > \varepsilon) \to 0$ då $n \to \infty$. *Skattningen blir bättre när man har fler observationer*.
- Ett problem kan uppstå när man vill ange *osäkerheten* i en skattare med hjälp av standardavvikelse/varians är att denna kan berå av någon okänd parameter. För att ange osäkerhet *numeriskt* måste även standardavvikelsen skattas. Detta kallas för *medelfelet* och kommer till stor användning vid beräkning av konfidensintervall.
- Def: *Medelfelet* för skattningen θ^* är en skattning av standardavvikelsen $D(\theta^*(X))$ och betecknas med $d(\theta^*)$.
- Exempel på tavlan.

MK och ML skattningar (rep.)

- Minsta-kvadrat metoden, MK:

  Om $E(X_i) = \mu_i(\theta)$ så fås MK-skattningen av θ genom att *minimera* förlustfunktionen

  $$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu_i(\theta))^2$$

  med avseende på θ.

- Maximum likelihood-metoden, ML:

  ML skattningen av θ fås genom att *maximera* likekihood-funktionen $L(\theta)$ med avseende på θ

  $$L(\theta) = \begin{cases} p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n; \theta) & \text{diskreta fallet} \\ f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n; \theta) & \text{kontinuerliga fallet} \end{cases}$$

- Tolkning av ML-metod: välj det parametervärde som ger högst sannolikhet för de givna mätvärdena.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

INTERVALLSKATTNING

- En punktskattare ger endast ett varde, själva skattningen av okänd parameter!
- $D(\theta^*)$ och $d(\theta^*)$ ger en uppfattning om osäkerheten i skattningen men det ar ofta svårt att tolka exakt vad den betyder i en praktisk situation.
- Vi skall nu ytterligare precisera ett mått pa den osäkerhet slumpen bidrar med när det vi försöker skatta parametrar.
- I många situationer är man inte nöjd med att bara ge en punktskattning av en parameter θ, t ex

  pH-värdet uppskattas till $\theta^* = 5.7$,

  utan man skulle få

  pH-värdet ligger med 95% *säkerhet mellan* 5.3 och 6.1, eller
  pH-värdet är med 95% *säkerhet minst* 5.4.

  Ett intervall av denna typ kallas ett *konfidensintervall*.
- *Syfte:* Att få numeriskt intervall där θ ligger med föreskriven säkerhet.
- Vi måste också precisera uttrycket *med* 95% *säkerhet*.

KTH VETENSKAP OCH KONST
KTH Matematik

Intervallskattning (forts.)

- Def: Låt $x = (x_1, \dots, x_n)$ vara utfall av ett slumpmässigt stickprov $X = (X_1, \dots, X_n)$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ och låt $0 < \alpha < 1$. Ett intervall,

$$I_\theta = (a_1(x),\ a_2(x))$$

kallas ett *konfidensintervall* för θ med *konfidensgrad* $1 - \alpha$ om den innehåller θ med sannolikhet $1 - \alpha$, dvs

$$P\left(a_1(X) < \theta < a_2(X)\right) = 1 - \alpha.$$

- Konfidensgränserna, $a_1(x)$ och $a_2(x)$ är observationer av stickprovsvariabler, $a_1(X)$ och $a_2(X)$. Ett konfidensintervall $I_\theta = (a_1(x),\ a_2(x))$ kan alltså betraktas som *en observation* av ett intervall med stokastiska gränser.

INTERVALLSKATTNING (FORTS.)

- Vanliga värden för konfidensgrad $1-\alpha$ är $0.95, 0.99$ och 0.999. Tolkning: om man då påstår att konfidensintervallet innehåller θ, löper man en risk på 0.05, 0.01 respektive 0.001 att göra ett felaktigt uttalande.
- Frekvenstolkning: Antag att man gång på gång skulle kunna upprepa insamlingen av stickprov och varje gång ta fram, säg ett tvåsidigt 95% intervall. I det långa loppet skulle andelen 0.95 av intervallen täcka över det okända parameter värde θ, medan återstående skulle *missa* det. Exempel av simuleringar ges i Lab 2.
- Om båda gränserna är ändliga kallas intervallet *tvåsidigt*.
- Ett *ensidigt* konfidensintervall ges av

$$P\left(a_1(X),\, \infty\right) = 1-\alpha,$$

eller

$$P\left(-\infty,\, a_2(X)\right) = 1-\alpha.$$

Allmän metod för konfidensintervall

- Börjar med exempel på tavla.
- Konstruktion av konfidensintervall för en okänd parameter θ kan beskrivas i följande steg:

1. Skriv upp parameter att skatta (θ) och hitta punktskattare $\theta^*(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Bestäm punktskattares fördelning.
3. Transformera punktskattare till en ny s.v. vars fördelning *inte beror på några okända parametrar*, dvs till en *pivotvariabel* [1].
4. Stäng in den transformerade s. v. mellan kvantiler.
5. Skriv om till $I_\theta = (a_1(x_1, \ldots, x_n), a_2(x_1, \ldots, x_n))$.

[1] *Pivot*=svängtapp eller gruntbult, grunden som resten av något vilar på.

Tillämpning på normalfördelningen: I_μ då σ är känd.

- Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$, dvs x_i, $i = 1, \ldots, n$ är observationer av de oberoende s.v. $X_1, \ldots, X_n$, där $X_i \in N(\mu, \sigma)$. Vi är intresserade att ställa upp ett $1 - \alpha$ konfidensintervall för väntevärdet μ. Antag att σ är känd.
  1. En punktskattare av μ är $\mu^* = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ (ML skattning.)
  2. $\mu^* = \bar{X} \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, dvs $E(\mu^*) = \mu$ och $D(\mu^*) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
  3. Enligt sats 6.1 är
  $$\frac{\mu^* - \mu}{D(\mu^*)} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1),$$
  dvs en pivotvariabel.
  4. Vi utnyttjar egenskaper av $N(0,1)$- fördelning för att bestämma kvantiler
  $$P\left(-\lambda_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{D(\mu^*)} < \lambda_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$
  5. Omforma olikheten till konfidensintervallet för μ
  $$I_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

KTH Matematik

- När σ är okänd så är $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$ också okänd och intervallet $I_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*))$ blir ej användbart.
- Lösning:

1-3. Vi ersätter $D(\mu^*)$ med skattare $d = S/\sqrt{n}$ (medelfelet) där

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

och använder istället en pivotvariabel

$$T = \frac{\mu^* - \mu}{d(\mu^*)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1).$$

4-5. Kvantiler för T fås nu från t-fördelningen, dvs $-t_{\alpha/2}(n-1)$ och $t_{\alpha/2}(n-1)$ (se mer om t-fördelning i Kap. 12.3). Omforma

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{d(\mu^*)} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

till I_μ på samma sätt som ovan.

Konfidensintervall för μ: sammanfattning

- Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$ där μ är okänd. Då

  om σ är känd:

$$I_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

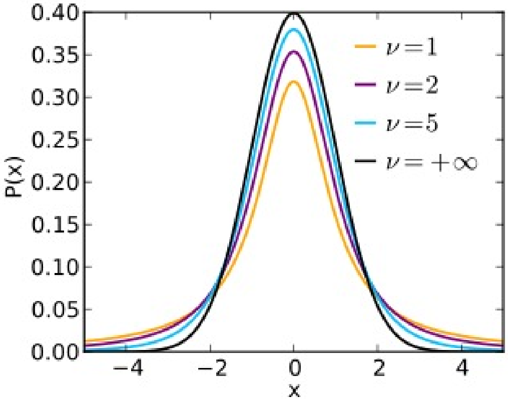
  om σ är okänd:

$$I_\mu = (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

  där kvantilerna ges av

  - $\lambda_{\alpha/2}$ är $N(0,1)$-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 2)
  - $t_{\alpha/2}(n-1)$ är t-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 3)

t-FÖRDELNING



FIGUR: Täthetsfunktion för t-fördelning med $\nu = n - 1$ frihetsgrader.