SF1922/SF1923: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 11
Intervallskattning.

Tatjana Pavlenko

24 april 2018

Plan för dagens föreläsning

- Vad är en intervallskattning? (rep.)
- Den allmänna metoden för att konstruera ett konfidensintervall (rep.)
- Tillämpning på normalfördelning: Intervallskattning för σ i $N(\mu, \sigma)$.
- Mer om situationer med normalfördelade data: två stickprov. Konfidensintervall för differens mellan olika väntevärden.
- Stickprov i par. (Kap. 12-3 (d))

VAD ÄR EN INTERVALLSKATTNING? (REP.)

Ett alternativt (till punktskattning) sätt att redovisa skattningen är att bestämma ett *intervall* som innehåller det sanna (verkliga) parametervärdet med t ex sannolikheten 0.95. Några exempel:

- Livslängden hos en bil ligger mellan 12 och 15 år med sannolikheten 0.95.
- Andelen väljare som röstar på socialdemokraterna är mellan 35% och 39% med sannolikheten 0.90.
- Antalet samtal till telefonväxel är mellan 15 och 18 per minut med sannolikheten 0.99.
- Standardavvikelsen för en viss laboratoriemättning är mellan 1.5 och 2 mg med sannolikheten 0.95.

Intervallskattning (rep.)

Förra föreläsningen definierades ett konfidensintervall en okänd parameter θ:

- Def: Låt $x = (x_1, \dots, x_n)$ vara utfall av ett slumpmässigt stickprov $X = (X_1, \dots, X_n)$ vars fördelning beror av en okänd parameter θ och låt $0 < \alpha < 1$. Ett intervall,

$$I_\theta = (a_1(x),\, a_2(x))$$

kallas ett *konfidensintervall* för θ med *konfidensgrad* $1 - \alpha$ om den innehåller θ med sannolikhet $1 - \alpha$, dvs

$$P\left(a_1(X) < \theta < a_2(X)\right) = 1 - \alpha.$$

- Konfidensgränserna, $a_1(x)$ och $a_2(x)$ är observationer av stickprovsvariabler, $a_1(X)$ och $a_2(X)$. Ett konfidensintervall $I_\theta = (a_1(x),\, a_2(x))$ kan alltså betraktas som *en observation* av ett intervall med stokastiska gränser.

KONSTRUKTION AV KONFIDENSINTERVALL (REP.)

Den allmäna metoden för att konstruera ett konfidensintervall för en okänd parameter θ kan beskrivas i följande steg:

1. Skriv upp parameter att skatta (θ) och hitta punktskattare θ^*.
2. Bestäm punktskattares fördelning.
3. Transformera punktskattare till en ny stokastisk variabel, $T(X)$ vars fördelning inte beror på några okända parametrar, i.e. en *pivot*.
4. Stäng in den transformerade s.v. $T(X)$ mellan kvantilerna t_α i dess kända fördelning:

$$1 - \alpha = P(t_{1-\alpha/2} < T(X) < t_{\alpha/2})$$

5. Skriv om i olikheten så att θ blir instängd i stället. Då ar

$$I_\theta = (a_1(x), a_2(x))$$

ett konfidensintervall för θ med konfidensgrad $1 - \alpha$.

KTH Matematik

Tillämpning på normalfördelning (rep.)

Konfidensintervall för μ i $N(\mu, \sigma)$: sammanfattning av λ- och t-metoden.

- Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$ där μ är okänd. Då

  om σ är känd:

  $$I_\mu = (\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} D(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

  om σ är okänd:

  $$I_\mu = (\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) d(\mu^*)) = \left(\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

  där kvantilerna ges av
  - $\lambda_{\alpha/2}$ är $N(0,1)$-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 2)
  - $t_{\alpha/2}(n-1)$ är t-fördelnings $\alpha/2$-kvantil (se Tabell 3)
- Man kan också göra konfidensintervall för σ och σ^2 i $N(\mu, \sigma)$. För detta behöver vi en ny fördelning.

I samband med stickprov från $N(\mu, \sigma)$ uppträder några (nya) fördelningar som vi behöver för att kunna hantera konfidensintervall.

- Sats: *Låt $X_1, \dots, X_n$ vara ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$. Då gäller följande:*

$$\mu^* = \bar{X} \in N(\mu, D),\ D = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1),$$

samt $\bar{X}$ och S är oberoende.

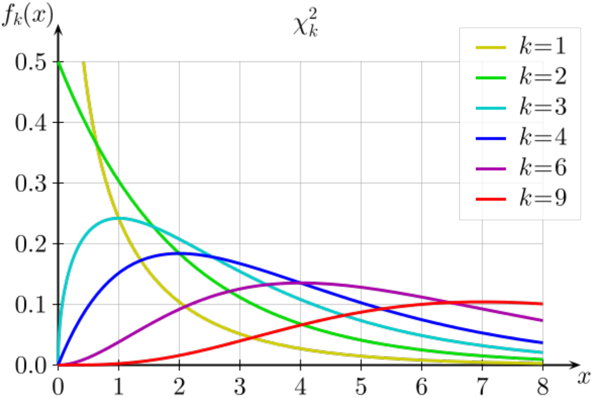
- Sats: *Låt $X \in N(0,1)$ och $Y \in \chi^2(f)$ vara oberoende s.v. Då gäller följande:*

$$\frac{X}{\sqrt{Y}/\sqrt{f}} \in t(f).$$

- Nästa sats ger samband mellan $N(\mu, \sigma)$, χ^2 och t-fördelningar:
- Sats: *Om $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende $N(\mu, \sigma)$-fördelare s.v. så gäller att*
$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \in t(n-1).$$
- Båda χ^2 och t-fördelningar förekommer som fördelningar för pivotvariabler vid stickprov från normalfördelningar.

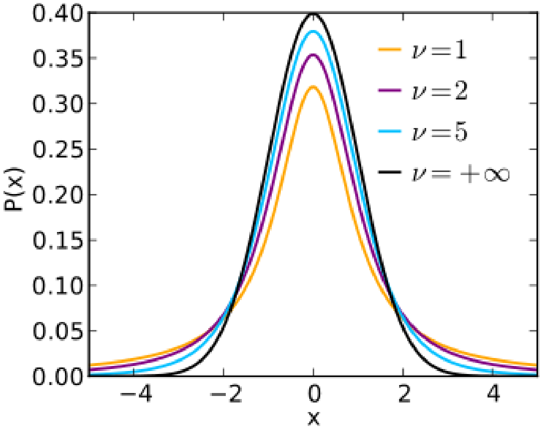
KTH Matematik

χ^2-FÖRDELNING.



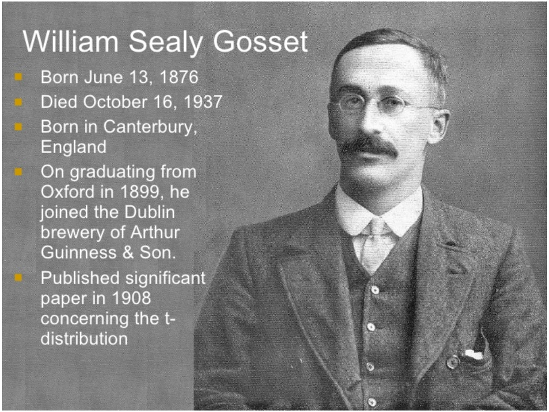
FIGUR: Exempel på täthetsfunktionen för χ^2-fördelning med olika antal frihetsgrader $k = n - 1$.

t-FÖRDELNING.



FIGUR: Exempel på täthetsfunktionen för t-fördelning med olika antal frihetsgrader $\nu = n - 1$. Den har $N(0, 1)$-fördelningen som gränsfördelning då $\nu \to \infty$.

t-FÖRDELNING (FORTS.)



FIGUR: Teorin av t-fördelningen presenterades först 1908 av kemisten och statistikern W. S. Gosset som var anställd på bryggeriet Arthur Guinness & Sons i Dublin. Han publicerade sin forskning under pseudonymen *Student*, därför man ofta kallar den *Students t-fördelning*.

KTH Matematik

KONFIDENSINTERVALL FÖR σ.

Exempel: konfidensintervall för σ i $N(\mu, \sigma)$, steg 1-3 på tavlan.

4.

$$P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right) = 1-\alpha.$$

5. Med detta erhålls I_σ i följande

   Sats: *Låt $x_1, \dots, x_n$ vara utfall av ett slumpmässigt stickprov fråm $N(\mu, \sigma)$. Då ges konfidensintervall för σ med konfidensgraden $1-\alpha$ av*

$$I_\sigma = (sk_1, sk_2),$$

   där

$$k_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}.$$

Två oberoende stickprov: Konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

I många praktiska situationer är det viktigt att kunna jämföra väntevärden i två olika grupper. Några exempel:

- Är två stållegeringar lika?
- Är en viss ny medicin bättre än den gamla?
- Är nätverk A mer effektivt än nätverk B?

Följande modell är användbar för sådana jämförelser: vi antar att

- $x_1, \ldots, x_{n_1}$ är oberoende observationer av s.v med $N(\mu_1, \sigma_1)$-fördelning och
- $y_1, \ldots, y_{n_2}$ är oberoende observationer av s.v med $N(\mu_2, \sigma_2)$-fördelning.

Vi vill härleda konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$, och delar upp analysen i två olika fall:

1. σ_1 och σ_2 är kända.
2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ är okänd.

- För båda fall går vi tillväga enligt steg 1-5: (talan). De erhållna intevallen sammanfattas i förljande
- Sats: (sats 12.3) *Låt $x_1, \ldots, x_{n_1}$ och $y_1, \ldots, y_{n_2}$ vara slumpmässiga, av varandras oberoende stickprov från $N(\mu_1, \sigma_1)$ respektive $N(\mu_2, \sigma_2)$.*
  - *Om σ_1 och σ_2 är kända erhålls ett tvåsidigt $1-\alpha$ konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med*

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} D\right), \quad D = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}.$$

  - *Om $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ och är okänd så är*

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f) d\right), \quad d = s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2},$$

$$s = \sqrt{\frac{Q_1 + Q_2}{(n_1-1) + (n_2-1)}}.$$

Q_1 och Q_2 är kvadratsummorna kring respektive stickprovsmedelväraden och $f = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$.

Stickprov i par.

Man vill undersöka effekten av blodtryckssänkande medicin. Diskutera två möjliga försöksupplägg.

Idé: Man vill undersöka effekten av blodtryckssänkande medicin. Två möjliga försöksupplägg är följande:

1. *En grupp om 10 personer* får medicinen och *en annan grupp* om 10 personer får placebo.

Man kan använda $I_{\mu_1-\mu_2}$ för två oberoende stickprov. **Problem**: Stora skillnader mellan personernas blodtryck och liten skillnad beroende på om man har placebo eller medicin! Variationen mellan olika individer kommer att dominera och det blir svårt att se om medicinen har någon effekt. $I_{\mu_1-\mu_2}$ kommer att bli för brett.

2. Mät blodtrycket *före* och *efter* behandling på en grupp om 10 pers.

Man kan **göra sig av variationen mellan individer** och istället fokusera på variation som orsakas av medicin!

Slutsats: *Om mätvärdena hör ihop parvis använder man modellen stickprov i par*!

Ex: Två vågar, A och B. Man misstänker att B har systematiskt fel så att det ger förhögt värde, medan A har rätt i medeltal.

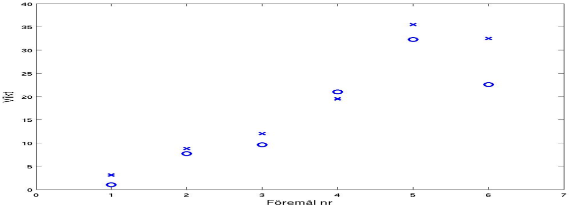
Modell.

$$\begin{aligned} &\text{Våg } A: \quad X_i \in N(\mu_i, \sigma_1). \\ &\text{Våg } B: \quad Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2), \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n$.

Man vägde 6 föremål på båda vågarna för att bestämma I_Δ.

STICKPROV I PAR.



Figur: Uppmätta vikter för A(o) och B(x). Stor skillnad mellan de olika observationer men liten skillnad mellan A och B varför stickprov i par är lämpligt.

Objekt, i	1	2	3	4	5	6	Obs. av
A, x_i	1.0	7.7	9.6	21.0	32.3	22.6	$X_i \in N(\mu_i, \sigma_1)$
B, y_i	3.1	8.8	12.0	19.5	35.5	35.5	$Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$
$z_i = y_i - x_i$	2.1	1.1	2.4	-1.5	3.2	9.9	$Z_i \in N(\Delta, \sigma)$

Konfidensintervall för Δ på tavlan!