SF1901: Sannolikhetsteori och statistik
Föreläsning 4
Kontinuerliga stokastiska variabler

Tatjana Pavlenko

27 mars, 2018

Plan för dagens föreläsning

- Repetition av *diskreta stokastiska variabler*. Väntevärde och varians av diskreta s. v.
- Kontinuerlig stokastisk variabel (Kap. 3.5–3.6)
- Exempel på kontinuerliga fördelningarna.
- Väntevärde och varians av kontinuerliga s. v. (Kap. 5.3)
- Fördelningsfunktion (Kap. 3.7)
- Kvantiler (Kap. 3.7)
- Funktioner av stokastiska variabler. (Kap 3.10)

DISKRETA STOKASTISKA VARIABLER, REP.

- Def: En stokastisk variabel, $X(\omega)$ är diskret om den endast kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden $\{k_1, k_2, \dots\}$, (syfrar på heltal).
- Def: $p_X(k) = P(X = k)$, $k = k_1, k_2, \dots$ kallas för sannolikhetsfunktionen för en diskret s.v. X.
- Villkor:
  - $0 \leq p_X(k) \leq 1$ för alla k
  - $\sum_{\text{alla } k} p_X(k) = 1$
- Med hjälp av $p_X(k)$ har vi:
  - $P(a \leq X \leq b) = \sum_{k:a \leq k \leq b} p_X(k)$
  - $P(X \leq a) = \sum_{k:k \leq a} p_X(k)$
  - $P(X > a) = \sum_{k:k>a} p_X(k) = 1 - \sum_{k:k \leq a} p_X(k) = 1 - P(X \leq a)$

- Def: Väntevärde för en diskret s.v. X definieras av

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\text{alla } k} k p_X(k).$$

- Sats (5.1, kap. 5.2): Låt X vara en s.v., $g(\cdot)$ är en reellvärd funktion och låt s.v. Y vara definierad av $Y = g(X)$. Då gäller att

$$E(Y) = \sum_{alla\, k} g(k) p_X(k).$$

- Tolkning: Man får väntevärdet för den nya s.v. $Y = g(X)$ genom att för varje tänkbart värde k av den s.v. X multiplicera $g(k)$ med tillhörande sannolikhet, varefter produkterna adderas.

- Def: Antag att en diskret s.v X har väntevärde $E(X) = \mu$. Då definieras variansen för X som

$$\sigma^2 = E((X-\mu)^2) = \sum_{\text{alla } k} (k-\mu)^2 p_X(k).$$

- Variansberäkning (räkneregel, mycket användbar, se bevis i Sats 5.6, kap. 5.3).

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- Standardavvikelsen, $D(X) = \sqrt{V(X)}$ (mer använt spridningsmått), har samma enhet som variabel själv.
- Ex på tavlan!

Kontinuerliga stokastiska variabler

- En kontinuerlig s.v. kan anta *alla* värden i ett intervall av R^1 eller i flera åtskilda intervall av R^1, t ex $[0, \infty)$, $[1, 2]$. För en s.v. har vi hellt kontinuum av tänkbara värden.
- Utfallen ligger *oändligt tätt* så att ingen utfall kan antas med positiv sannolikhet, dvs sannolikhetsfunktion kan inte definieras på samma sätt som vi gjorde för diskreta s.v.
- Istället: För en kontinuerlig s.v. läggs sannolikhetsmassan 1 ut på R^1 enligt *täthetsfunktion* $f_X(x)$, $x \in R^1$.

KTH Matematik

Kontinuerliga stokastiska variabler (forts.)

- Def: En stokastisk variabel X är kontinuerlig om det finns icke-negativ funktion $f_X(\cdot)$ sådan att

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx,$$

för alla A. $f_X(x)$ kallas för täthetsfunktionen för s.v X.
- Jämför med diskreta fallen! Summeringen av sannolikhetsfunktionen ersatts av integration.
- Villkor:
  - $f_x(x) \geq 0$,
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, dvs hela area under täthetsfunktionen är 1.
- Skilj noga på symbolen X som betecknar en s.v. och x som används som argument i funktionen $f_X(x)$!

Vanliga kontinuerliga fördelningar

- *Kontinuerlig likformig fördelning.*
- Def: Om en s.v. X har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{om} \quad a < x < b \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

  sägs X vara likformigt fördelad mellan a och b. Beteckning: $X \in U(a, b)$. U är från engelska *uniform*.
- Tolkning: Eftersom vi betraktar en kontinuerlig s.v. kan vi inte definiera den som att alla värden mellan a och b är lika sannolika (jmf. med det diskreta fallet!) - enskilda värden har alltid sannolikhet noll för kontinuerliga s.v., dvs $P(X = x) = 0$. Det man istället menar är att sannolikheten att s.v. X ligger i något givet intervall inom (a, b) bara beror på intervallets bredd och inte på *var* intervallet ligger.

KTH Matematik

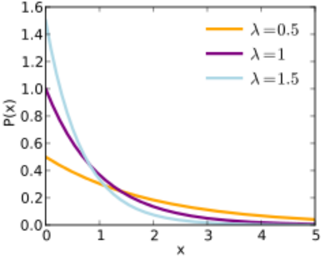
- *Exponentialfördelning.*
- Def: Om en s.v. X har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{om} \quad x > 0, \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases},$$

  $\lambda > 0$, sägs X vara exponentialfördelad. Bet: $X \in Exp(\lambda)$.
- En viktig genskap hos $Exp(\lambda)$: Exponentialfördelning *saknar minne*!
- Minneslöshet hos $Exp(\lambda)$ på tavlan (se anm. 3.2, kap. 3.6)!
- Förekomst: används för att modellera t ex tiden tills någon får sitt nästa telefonsamtal, tiden tills någon råkar ut för sin nästa bilolycka eller avståndet mellan mutationer på en DNA-sträng.

KTH Matematik

VANLIGA KONTINUERLIGA FÖRDELNINGAR (FORTS.)



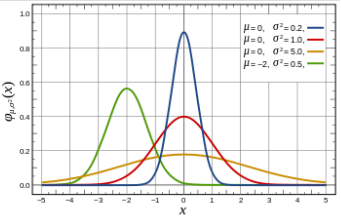
FIGUR: Täthetsfunktion $f_X(s)$ uppritad för tre olika exponentialfördelningar: $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ respektive $\lambda = 1.5$. Som synes ju mindre λ är, desto mer utbredd är sannolikhetsmassan över intervallet $(0, \infty)$.

- *Normalfördelning.*
- Def: Om en s.v. X har täthetsfunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

  där μ och $\sigma > 0$ är givna tal, sägs X vara normalfördelad.
  Beteckning: $X \in N(\mu, \sigma)$.
- Viktigaste av alla fördelningar! Kallat även för *Gauss-fördelning*. Benämningen hänsyftar på den tyske matematiker Carl Friedrich Gauss (1777-1855).
- Att den är så viktig beror på att om man summerar många stokastiska variabler (tänk: något slumpmässighet som beror på många olika faktorer) så är resultatet nästan alltid normalfördelat. Mer om detta under fls. 7, (kap. 6).

Vanliga kontinuerliga fördelningar (forts.)



Figur: Täthetsfunktion $f_X(s)$ uppritad för fyra olika normalfördelningar. Man ser att effekten av att ändra μ är att täthetens läge försjuts (med toppen liggandes vid μ), medan fördelningen blir mer koncentrerad när σ är liten, respektive mer utspridd när σ är stor.

Väntevärde och varians för kontinuerliga de s.v.

- **Def:** Väntevärde av en kontinuerlig s.v X definieras av

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx.$$

- **Sats:** (se Stas 5.1, kap. 5.2) Om $Y = g(X)$ där $g(\cdot)$ är en reelvärd funktion så gäller att

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx.$$

- **Def:** Variansen av en kontinuerlig s.v X definieras av

$$\sigma_X = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\,dx.$$

- På samma sätt som i det diskreta fallet gäller följande (se Sats. 5.6):

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- $E(X)$ och $V(X)$ för $X \in Exp(\lambda)$ på tavlan.

KTH Matematik

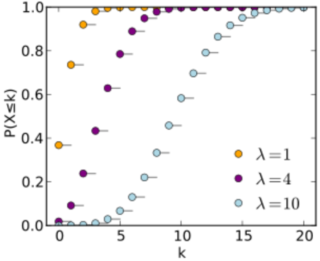
FÖRDELNINGSFUNKTION FÖR EN S.V.

- Def: Funktionen

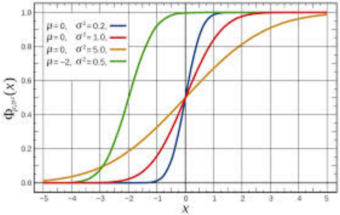
$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in R^1$$

  kallas för fördelningsfunktionen för den s.v. X.
- Villkor:
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$, (slh)
  - $F_X(x)$ är icke-avtagande funktion av x,
  - $F_X(x) \to 0$ då $x \to -\infty$ och $F_X(x) \to 1$ då $x \to \infty$.
  - $F_X(x)$ är kontinuerlig till höger för varje x.

FÖRDELNINGSFUNKTION FÖR EN S.V. (FORTS.)



FIGUR: Fördelningsfunktion $F_x(k)$ uppritad för tre olika Poisson-fördelningar: $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ respektive $\lambda = 10$.



FIGUR: Fördelningsfunktion för $N(\mu, \sigma)$ uppritad för några olika värden på μ och σ.

- I det diskreta fallet finns det ett nära samband mellan fördelningsfunktionen och sannolikhetsfunktionen:

$$F_X(k) = \sum_{j:j\leq k} p_X(j),\ p(k) = \begin{cases} F_X(0) & \text{om} \quad k = 0 \\ F_X(k) - F_X(k-1) & \text{f.ö.} \end{cases}$$

- I det kontinuerliga fallet finns ett motsvarande samband mellan fördelningsfunktionen och täthetsfunktionen:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x),$$

i varje punkt x där $f_X(x)$ är kontinuerlig (se Sats 3.1).

- Tolkning: bilden på tavlan för båda fallen. Låt $A = (-\infty, x]$,

$$P(X \in A) = P(X \leq x) = F_X(x).$$

Fördelningsfunktion för en s.v. (forts.)

- Ofta behöver man beräkna sannolikheter på formen $P(a < X \leq b)$, $P(X \leq a)$, $P(X > a)$, eller liknande. $F_X(x)$ är mycket användbar för sådana beräkningar!
- En viktig sats (se Sats 3.3): Om $a < b$ så gäller att

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

- Bevis och exempel på tavlan.
- Def: Lösningen $x = x_\alpha$ till ekvationen

$$F_X(x) = 1 - \alpha$$

kallas för α-kvantil för den s.v. X.

KTH Matematik