KTH Matematik | Tentamensskrivning, 12/1-04, kl 8.00–13.00.
Harald Lang | 5B1306 Inledande Finansiell Matematik
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna.

1. Bestäm priset på en Europeisk köpoption på 100 kilo oxfile med leverans 12 juni 2004 till inlösenpriset 24 000 kronor. Futurespriset på samma vara med samma leveranstid är 25 000 kronor, och futuresprisets volatilitet antas vara 24% på ett år. Räntan är 5% per år (med kontinuerlig förräntning) och antas vara deterministisk.

   En användbar formel finns i slutet av tentan, och en tabell över normalfördelningen bifogas. (10p.)

2. Vi har en portfölj av räntepapper vars nuvärde är 75 000 kronor, och vars duration är 4 år. Nu tar vi dessutom en kort position på ett futureskontrakt på räntepapper med futurespriset $F_0 = 50\,000$ kronor. Futurespriset är avhängigt räntan så att en ökning med ett litet $\delta y$ av yielden minskar futurespriset med $2.3F_0\,\delta y$ kronor.

   Bestäm durationen för portföljen när futureskontraktet inkluderas. (10p.)

3. En aktie som idag kostar 100 kronor ger utdelning 3 kronor om två månader, och om sex månader en utdelning på 3.5% av det då gällande aktiepriset (före utdelningen). Bestäm terminspriset (”forward”) på aktien med inlösentid om ett år.

   2-månadersräntan är 4% per år, liksom 6-månadersräntan, men 12-månadersräntan är 4.3% (kontinuerlig förräntning). (10p.)

4. Nedanstående är ett binomialträd över räntan enligt Ho-Lees modell. Räntan anges i procent *per år* med kontinuerlig förräntning; tidssteget är sex månader.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 5 | 6 | 7 |
| | | 4 | 5 |
| | | | 3 |

   Nu skrives ett kontrakt som ger innehavaren 10 000 kronor om räntan först går ner, sedan upp, sedan ner igen, dvs. om räntorna tar värdena 6–5–6–5. I annat fall får innehavaren ingenting.

   Bestäm priset på detta kontrakt. Bestäm även 1.5-åriga nollkuopngräntan. (10p.)

5. En Euro kostar 9.05 kronor; Euro-räntan är 3% per år och kronräntan 4% per år. Bestäm priset på en Europeisk option att sälja 100 Euro för 900 kronor om nio månader. Eurons volatilitet gentemot kronan antas vara 12% på ett år. (10p.)

**FORTS...**En uppgift till!

6. Låt $F_0$ vara futurespriset på en tillgång som vid inlösentiden om $T$ dagar har (det stokastiska) värdet $X$. Låt $P$ vara värdet idag på ett kontrakt som vid tiden $T$ ger $Xe^{r_1+\cdots+r_T}$. Här är $r_i$ räntan från dag $i-1$ till dag $i$ (dvs. en krona som sätts in på ett konto dag $i-1$ ger växer till $e^{r_i}$ kronor dag $i$.) Dessa räntor är stokastiska; $r_i$ realiseras alltså dag $i-1$.

   Bevisa att $P = F_0$. Här krävs ett fullständigt argument baserat bara på lagen om ett pris. (10p.)

---

Följande formel kan vara användbar: om $X = ae^{\sigma z}$ där $z \in N(0,1)$ och $a$, $\sigma$, $K$ är konstanter, så gäller

$$\mathrm{E}[\max(X-K,0)] = \mathrm{E}[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \quad \text{där}$$
$$d_1 = \frac{\ln(\mathrm{E}[X]/K) + \sigma^2/2}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma$$

Här är $\Phi$ standard normalfördelningen; se bifogad tabell.

**Svar:**

**1)** 2 022.21 kronor (beror litet på hur man interpolerar i tabellen) **2)** 2.47 år (mer precist: 2 7/15 år) **3)** 97.738 kronor **4)** Kontraktet är värt 1 148.14 kronor; Nollkupongräntan för 1.5 år är 5.9958% **5)** 30.99 kronor.

**6)** Gör följande strategi: Sätt in $F_0$ kronor på penningmarknadskontot, och tag $F_0 \exp(r_1)$ futureskontrakt.

Nästa dag har man då $F_0 \exp(r_1) + \exp(r_1)(F_1 - F_0) = F_1 \exp(r_1)$ kronor. Sätt in dessa på penningmarknadskontot och ändra futurespositionen till $\exp(r_1 + r_2)$ kontrakt.

Nästa dag har man då totalt $F_1 \exp(r_1 + r_2) + \exp(r_1 + r_2)(F_2 - F_1) = F_2 \exp(r_1 + r_2)$ kronor. Sätt in dessa på penningmarknadskontot.

Och så vidare, fram till tiden $T$, då man har $F_T \exp(r_1 + \cdots + r_T)$ $= X \exp(r_1 + \cdots + r_T)$ kronor.

Vi har på det sättet gjort ett syntetiskt kontrakt som ger utdelningen $F_T \exp(r_1 + \cdots + r_T) = X \exp(r_1 + \cdots + r_T)$ kronor vid tiden $T$ och som kostar $F_0$ kronor idag och inga andra nettoflöden av pengar. Enligt lagen om ett pris är nu $P = F_0$.