KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 21/8-2007, kl 8.00–13.00.
5B1540 Sannolikhetsteori.
Hjälpmedel: miniräknare, formelsamling enl. Appendix 2 i Guts bok (bifogas)

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Alla införda beteckningar som inte är standard skall definieras.

---

1. Det stokastiska variablerna U och V är oberoende och har båda fördelningen Exp(1). Bestäm täthetsfunktionen för $X = \frac{U}{V}$. (10p.)

2a. Den stokastiska variabeln Z är normalfördelad N(0,1). Bestäm $\mathrm{E}[Z \mid Z > a]$. (5p.)

b. De stokastiska variablerna X och Y är normalfördelade $\mathrm{N}(0, \sigma_x^2)$ respektive $\mathrm{N}(\mu, \sigma_y^2)$ ($\sigma_\bullet^2$ är variansen) och oberoende. Bestäm fördelningen för X betingat $X + Y = a$. (5p.)

3. Den stokastiska variabeln X är konstruerad på följande sätt: först observerar vi ett utfall λ av L som är uniformt fördelad $\mathrm{U}(0, a)$; därefter observerar vi ett utfall x av X som är Poissionfördelad $\mathrm{Po}(\lambda)$. Bestäm (det obetingade) väntevärdet $\mathrm{E}(X^2)$. (10p.)

4. De stokastiska variablerna $X_k, k = 2, 3, \ldots$ är binomialfördelade: $X_k \in \mathrm{Bin}(k, \frac{k+1}{k^2})$. Bevisa att X_k konvergerar i fördelning då $k \to \infty$, och bestäm gränsfördelningen. (10p.)

5. Den stokastiska variabeln Y är konstruerad på följande sätt: först observerar vi ett utfall x av X som är uniformt fördelad $\mathrm{U}(0, 1)$; därefter observerar vi ett utfall y av Y som är binomialfördelad $\mathrm{Bin}(n, x)$.

a. Bestäm sannolikhetsgenererande funktionen för (den obetingade variabeln) Y. (5p.)

b. Bestäm (den obetingade) sannolikhetsfördelningen för Y. (5p.)

6. Punkter fördelar sig i planet enligt en tvådimensionell Poissonfördelning med intensiteten λ. Låt R vara avståndet från origo till den *näst* närmaste punkten. Bestäm $\mathrm{E}(R^2)$. (10p.)

(Alltför) kortfattade lösningar

1.
$$P(Z \in D) = \int_0^\infty \int_0^\infty I_D\Big(\frac{u}{v}\Big) e^{-u-v}\, du\, dv = \int_0^\infty \int_0^\infty I_D(z) v\, e^{-v(z+1)}\, dz\, dv$$
$$= \int_0^\infty I_D(z) \frac{1}{(1+z)^2}\, dz = \int_D \frac{h(z)}{(1+z)^2}\, dz$$

där $h(z)$ är Heaviside-funktionen. Alltså är tähehsfunktionen $f(z) = \dfrac{h(z)}{(1+z)^2}$,

2a.
$$\mathrm{E}[Z \mid Z > a] = \frac{\mathrm{E}[Z\, I_{Z>a}]}{P(Z > a)} = \frac{1}{(1-\Phi(a))\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{(1-\Phi(a))\sqrt{2\pi}}$$

2b. Definiera variabeln Z genom sambandet $X = \beta(X+Y)+Z$ där $\beta = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$. Då blir $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = 0$. Enligt satser är Z normalfördelad och oberoende av $X+Y$. Vi får $\mathrm{E}(Z) = -\dfrac{\sigma_x^2 \mu}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$ och $\mathrm{Var}(Z) = \dfrac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$.
Betingat $X+Y = a$ gäller alltså att $X = \beta a + Z$, så
$Z \in N\Big(a - \dfrac{\sigma_x^2\mu}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}, \dfrac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\Big)$.

3. Om $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$, så $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2$. Alltså är $\mathrm{E}(X^2 \mid L)$ $= L + L^2$. Vi får
$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(L + L^2) = \frac{1}{a}\int_0^a x + x^2\, dx = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}$$

4. Sannolikhetsgenererande funktionen för X_k är
$$g_k(t) = \big(1 + \frac{1+k}{k^2}(t-1)\big)^k$$
Alltså
$$\ln(g(t) = k\, \ln\big(1 + \frac{1+k}{k^2}(t-1)\big) = k\Big(\frac{1+k}{k^2}(t-1) + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})\Big)$$
$$\to t-1 \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

Härav följer $g_k(t) \to e^{t-1}$ som är sgf för Po(1). Svar: konvergerar i fördelning mot Po(1).

5a. För givet $x, 0 \le x \le 1$, gäller $g_{Y|X=x}(t) = \big(1 + x(t-1)\big)^n$. Alltså $g_Y(t) = \mathrm{E}\big[\big(1+x(t-1)\big)^n\big] = \int_0^1 \big(1 + x(t-1)\big)^n\, dx = \frac{1}{(n+1)}\, \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$.

5b. $g_Y(t) = \frac{1}{(n+1)}(1 + t + \cdots + t^n)$, vilket visar att Y är likformigt fördelad på talen $\{0, 1, \cdots, n\}$.

6. $R^2 > x$ precis då det finns 0 eller 1 punker i cirlekskivan med radie $\sqrt{x}$. Sannolikheten för detta är $(1 + \pi x)e^{-\pi x}$, dvs. $P(R^2 > x) = (1 + \pi x)e^{-\pi x}$. Täthetsfunktionen för R^2 är därför $\pi^2 x e^{-\pi x}$. för $x \geq 0$. Alltså

$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^\infty \pi^2 x^2 e^{-\pi x}\, dx = \frac{2}{\pi}$$