# SF1901 Sannolikhetsteori och statistik I

Jimmy Olsson

Föreläsning 6
13 november 2017

# Idag

Förra gången

Mer om väntevärden och varianser (Kap. 5.2–5.3)

Beroendemått (Kap. 5.4)

Summor, linjärkombinationer och stora talens lag (Kap. 5.5–5.6)

# Idag

Förra gången

Mer om väntevärden och varianser (Kap. 5.2–5.3)

Beroendemått (Kap. 5.4)

Summor, linjärkombinationer och stora talens lag (Kap. 5.5–5.6)

# Varians och standardavvikelse för stokastiska variabler

- *Variansen* för en stokastisk variabel $X$ definieras som

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2],$$

där $\mu_X = \mathbb{E}(X)$, dvs.

$$\mathbb{V}(X) = \begin{cases} \sum_k (k - \mu_X)^2 \, p_X(k) & \text{om } X \text{ är diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \, f_X(x) \, dx & \text{om } X \text{ är kontinuerlig.} \end{cases}$$

- Variansen mäter hur mycket $X$ avviker från $\mathbb{E}(X)$ i medeltal och ger sålunda ett mått på fördelningens *spridning*.
- Ibland betecknas variansen även som $\sigma_X^2$.
- Man visar enkelt att $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- Exempel!

# Flerdimensionella s.v.

- En *n-dimensionell s.v.* $(X_1, \ldots X_n)$ är en $\mathbb{R}^n$-värd funktion definierad på ett utfallsrum $\Omega$.
- Den simultana fördelningsfunktionen definieras i detta fall som

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

# Flerdimensionella sannolikhets- och täthetsfunktioner

- Funktionen

$$p_{X,Y}(j,k) = \mathbb{P}(X = j, Y = k), \quad j,k \in \{0,1,2,\ldots\}$$

  kallas *sannolikhetsfunktionen* för den diskreta tvådimensionella s.v. $(X, Y)$.

- Om det finns en icke-negativ funktion $f_{X,Y}(x,y)$ sådan att

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

  för alla $A$ sägs den tvådimensionella s.v. $(X, Y)$ vara *kontinuerlig*. Funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ kallas *täthetsfunktionen för* $(X, Y)$.

- Motsvarande definitioner gäller i det flerdimensionella fallet.

# Oberoende s.v.

## Definition

De s.v. $X$ och $Y$ kallas oberoende om

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

för alla mängder $A$ och $B$.

- Det visade sig att

$$X \text{ och } Y \text{ oberoende } \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)p_Y(k) & \text{för alla } j,k \quad \text{(disk. fallet)}, \\ f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) & \text{för alla } x,y \quad \text{(kont. fallet)}. \end{cases}$$

# Fördelning av maximum och minimum

- Det visade sig tämligen enkelt att bestämma fördelningsfunktionerna för $Z_+ = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ och $Z_- = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ då $X_i$:na var oberoende och likafördelade med täthets- och fördelningsfunktion $f$ resp. $F$
- Dessa gavs av

$$F_{Z_+}(z) = (F(z))^n \Rightarrow f_{Z_+}(z) = n(F(z))^{n-1} f(z),$$

resp.

$$F_{Z_-}(z) = 1 - (1 - F(z))^n \Rightarrow f_{Z_-}(z) = n(1 - F(z))^{n-1} f(z).$$

# Exempel: ”en kedja är inte starkare än sin svagaste länk”

- Påfrestningen (enhet kN) som en länk tål är en stokastisk variabel som är Rayleighfördelad med täthetsfunktionen

  $$f_X(x) = \frac{1}{4} x e^{-x^2/8}, \quad x > 0.$$

  Vad är sannolikheten att en kedja som består av 4 länkar brister om den utsätts för belastningen 0.5 kN?

  $$\text{svar: } 1 - e^{-1/8} \approx 0.12$$

# Idag

Förra gången

Mer om väntevärden och varianser (Kap. 5.2–5.3)

Beroendemått (Kap. 5.4)

Summor, linjärkombinationer och stora talens lag (Kap. 5.5–5.6)

# Varians för affin transformation av en s.v.

- Exempel!
- Med hjälp av definitionen av varians visar man enkelt följande.

## Sats

*För alla s.v. $X$ och konstanter $a$ och $b$ gäller att*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+b) &= a\mathbb{E}(X)+b,\\
\mathbb{V}(aX+b) &= a^2\mathbb{V}(X),\\
\mathbb{D}(aX+b) &= |a|\mathbb{D}(X).
\end{aligned}$$

- OBS! Konstanten $b$ bidrar inte till variansen.

# Väntevärde för en funktion av flerdimensionell s.v.

- Låt $(X, Y)$ vara en tvådimensionell s.v. och $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en reellvärd funktion. Sätt $Z = g(X, Y)$. Då gäller följande.

## Sats

$$\mathbb{E}(Z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j,k} g(j,k)\, p_{X,Y}(j,k) & \textit{om } (X,Y) \textit{ är diskret,} \\ \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy & \textit{om } (X,Y) \textit{ är kontinuerlig.} \end{cases}$$

- Motsvarande gäller i det flerdimensionella fallet.
- Som vi ska se i det följande kan ovan sats användas för att erhålla ett generellt resultat för det viktiga fallet då $X$ och $Y$ är oberoende och

$$g(X, Y) = XY.$$

# Väntevärde för produkt av oberoende s.v.

**Sats**

*Om $X$ och $Y$ är oberoende gäller att*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

- OBS! Resultatet gäller i allmänhet *inte* om $X$ och $Y$ beroende.
- Ovan resultat kan generaliseras till fler än två s.v.

**Sats**

*Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende gäller att*

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\cdots\mathbb{E}(X_n).$$

# Väntevärde för linjärkombination av s.v.

- Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara s.v. och betrakta en linjärkombination

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n + b = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b,$$

där konstanterna $a_1, \ldots, a_n$ och $b$ kan vara positiva eller negativa tal.

- Följande sats visas på samma sätt som den föregående och gäller även om $X_i$:na är beroende.

### Sats

*För alla s.v. $X_1, \ldots, X_n$ och konstanter $a_1, \ldots, a_n$, $b$ gäller att*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(X_i) + b.$$

# Idag

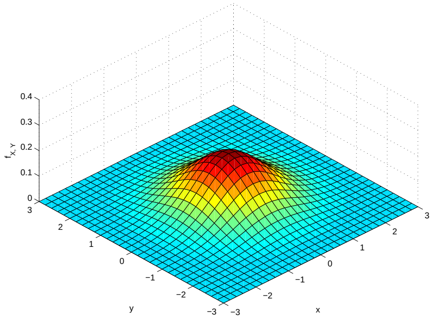
Förra gången

Mer om väntevärden och varianser (Kap. 5.2–5.3)

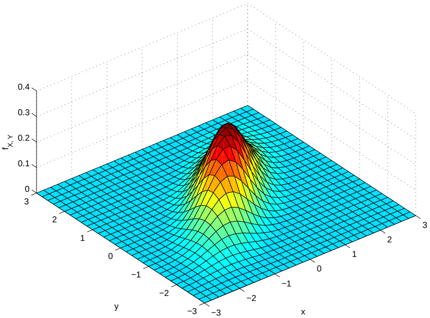
Beroendemått (Kap. 5.4)

Summor, linjärkombinationer och stora talens lag (Kap. 5.5–5.6)

# Exempel: täthetsfunktion för oberoende/beroende s.v.




(a) Oberoende variabler




(b) Beroende variabler

# Beroendemått

- Ett *beroendemått* sammanfattar, *i ett enda tal*, hur två s.v. $X$ och $Y$ samvarierar.
- Vi kommer att diskutera två vanliga och närbesläktade beroendemått, nämligen *kovarians* och *korrelation*.

# Kovarians

- Kovariansen mellan två s.v. $X$ och $Y$ definieras som

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

- Notera att $\mathbb{C}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \mathbb{V}(X)$.
- Vidare ger symmetri att $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{C}(Y, X)$.
- Om någon av variablerna är konstant blir $\mathbb{C}(X, Y) = 0$.
- Intuition: kovariansen bör bli
    - *positiv* om det finns en tendens att $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ är positiv, dvs. att variablerna avviker *åt samma håll* från sina respektive väntevärden,
    - *negativ* om det finns en tendens att $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ är negativ, dvs. att variablerna avviker *åt olika håll* från sina respektive väntevärden.

# Kovarians (forts.)

- Följande sats är ofta användbar vid beräkningar.

## Sats

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

- Speciellt gäller följande.

## Sats

*$X$ och $Y$ är oberoende* $\Rightarrow \mathbb{C}(X, Y) = 0$

OBS! Omvändningen är *inte* sann i allmänhet!

- Exempel?

# Korrelation

- *Korrelationskoefficienten* för $X$ och $Y$ definieras som
$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}.$$
- Notera att korrelationskoefficienten är *dimensionslös*.
- Man kan visa att $|\mathbb{C}(X, Y)| \leq \mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)$, vilket medför att $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- Man kan även visa att $|\rho(X, Y)| = 1$ om och endast om $X$ och $Y$ är *linjärt beroende*, dvs. $Y = aX + b$ för konstanter $a$ och $b$; mer specifikt gäller då att $a > 0 \Rightarrow \rho(X, Y) = 1$ och $a < 0 \Rightarrow \rho(X, Y) = -1$.

# Idag

Förra gången

Mer om väntevärden och varianser (Kap. 5.2–5.3)

Beroendemått (Kap. 5.4)

Summor, linjärkombinationer och stora talens lag (Kap. 5.5–5.6)

# Varians för summor

- Vi såg tidigare att

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

för alla (även beroende) s.v. $X$ och $Y$.

- I motsvarande uttryck för variansen tillkommer dock en term som motsvaras av kovariansen:

## Sats

*För alla s.v. $X$ och $Y$ gäller att*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

- I specialfallet då $X$ och $Y$ är *oberoende*, vilket implicerar att $\mathbb{C}(X,Y) = 0$, blir således

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

# Varians för linjärkombination

- Följande sats utvidgar ovan resultat för kovarians för summa av två s.v. till en godtycklig linjärkombination.

## Sats

*För alla s.v.* $X_1, \ldots, X_n$ *och konstanter* $a_1, \ldots, a_n$, $b$ *gäller att*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_j a_k \mathbb{C}(X_j, X_k).$$

- I specialfallet då alla $X_i$:na är oberoende blir alla kovarianser noll, och man erhåller

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(X_i).$$

- OBS! Konstanten $b$ bidrar *ej* till variansen.

# Väntevärde och varians för medelvärde

- Vi låter nu $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende s.v. med gemensamt väntevärde $\mu$ och standardavvikelse $\sigma$. Beteckna *medelvärdet* med
$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$
- Med hjälp av ovan satser erhålls
$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=\mu} = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

och, då $X_i$:na är oberoende,
$$\mathbb{V}(\bar{X}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{V}(X_i)}_{=\sigma^2} = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

# Väntevärde och varians för medelvärde (forts.)

- Som förväntat gäller att $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$.
- Märkvärdigare är att variansen är *omvänt proportionell mot n* enligt
$$\mathbb{V}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2 \Rightarrow \mathbb{D}(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma.$$
- Det förefaller alltså som om fördelningen för $\bar{X}$ blir mer och mer koncentrerad kring dess väntevärde $\mu$ när $n$ ökar.
- Detta beskrivs närmare av *stora talens lag*.

# Stora talens lag

- Sats

  *Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade s.v. med gemensamt väntevärde $\mu$ och låt*

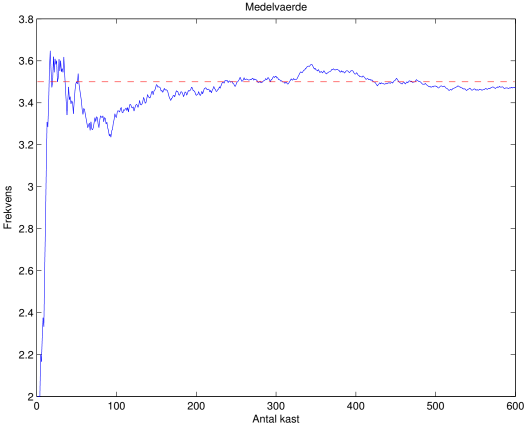
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

  *Då gäller, för varje $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \textit{då} \quad n \to \infty.$$

  - Exempel med tärningskast!

# Upprepade tärningskast




Figur: Medelvärde $\bar{X}$ av upprepade tärningskast. Rödstreckad linje indikerar väntevärdet $\mu = \mathbb{E}(X) = 3.5$.

# Stora talens lag

- Stora talens lag är ett fundamentalt resultat i matematisk statistik.
- Tolkning: medelvärdet är en bra uppskattning av väntevärdet när $n$ är stort!
- Om vi inte känner väntevärdet kan vi alltså gissa, eller ”skatta”, väntevärdet med hjälp av medelvärdet. Detta kommer att vara av stor vikt när man skall *kalibrera* en slumpmodell med hjälp av observerad data. Stora talens lag är därför en grundsten i empiriska vetenskaper.
- Detta kommer vi att diskutera vidare i inferensdelen av kursen.

# Nästa föreläsning

- Normalfördelningen,
- mer om linjärkombinationer av oberoende normalfördelade s.v.,
- centrala gränsvärdessatsen.