LÖSNINGSPRINCIPER KONTROLLKRIVNING 2, REPETITIONSKURS 2006

a) Principutseende för täthetsfunktion: $f_x(x) = a \cdot x^b,\ 0 \le x \le c$ (det gäller då att $a \cdot c^{b+1} = b+1$).
$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^c a \cdot x^{b+1}dx = \frac{ac^{b+2}}{b+2}$, vilket enligt parentesen ovan blir $\frac{c(b+1)}{b+2}$.
Sätt in siffror.

Vi får $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^c a \cdot x^{b+2}dx = \frac{ac^{b+3}}{b+3}$, vilket enligt parentesen ovan blir $\frac{c^2(b+1)}{b+3}$. Sätt in värden i detta uttryck och beräkna variansen som $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

c) Standardavvikelsen är roten ur variansen.

d) Använd att $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.

e) Beräkna först variansen enligt

$$V(aX + bY + c) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

Notera att $V(X) = (D(X))^2$ och $V(Y) = (D(Y))^2$. Utnyttja sedan att $D(aX + bY + c) = \sqrt{V(aX + bY + c)}$.

f) Använd att $aX + bY + c$ är normalfördelad med väntevärde och standardavvikelse som ovan. Se problemsamling eller kursbok för beräkning sannolikheten.

g) Sätt $X_i = i$:te enhetens vikt. Enligt centrala gränsvärdessatsen är $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ approximativt normalfördelad, $\mathrm{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ där väntevärdet μ och standardavvikelsen σ är givna. Vi erhåller

$$P(Y > x) = 1 - P(Y \le x) = 1 - \Phi(\frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

Sätt in siffror. Eventuellt måste man utnyttja att $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.