LÖSNINGSPRINCIPER KONTROLLKRIVNING 3, REPETITIONSKURS 2006

a) Principutseende av sannolikhetsfunktionen: $p_X(k) = C_k p^a(1-p)^k,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$ där $C_k = \binom{k+a-1}{a-1}$. Likelihoodfunktionen för n observationer blir

$$L(p) = C_{x_1}p^a(1-p)^{x_1}C_{x_2}p^a(1-p)^{x_2}\cdots C_{x_n}p^a(1-p)^{x_n} = C_{x_1}C_{x_2}\cdots C_{x_n}p^{na}(1-p)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Vi söker det p-värde som maximerar L. Samma p-värde maximerar $\ln(L)$. Vi erhåller

$$\ln(L) = \ln(C_{x_1}C_{x_2}\cdots C_{x_n}) + na\ln(p) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\ln(1-p).$$

Derivera,

$$\frac{d\ln(L)}{dp} = \frac{na}{p} - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{1-p}$$

Som är 0 för $p = p^* = \frac{na}{na+x_1+x_2+\cdots+x_n}$. Sätt in siffror. Värdet på n är 4 i samtliga uppgifter.

b) Vi skall minimera $Q = (x_1 - c_1b)^2 + (x_2 - c_2b)^2 + (x_3 - c_3b)^2 + (x_4 - c_4b)^2$. Derivatan är

$$Q' = -2\{c_1(x_1 - c_1b) + c_2(x_2 - c_2b) + c_3(x_3 - c_3b) + c_4(x_4 - c_4b)\}$$

som är 0 för $b = b^* = \frac{c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4}{c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_3^2}$. Sätt in värden.

c) Alternativen "Eftersom m inte finns på intervallet så är hypotesen $\mu = m$ falsk (på nivån 5%)" och "Intervallet innehåller väntevärdet i 95% av ett stort antal tänkta försök" är sanna.

d) Båda skattningarna är väntevärdesriktiga. Om $\hat{\mu}^*_{\text{obs}} = ax_1 + bx_2 + cx_3$ är

$$V(\mu^*) = a^2\sigma^2 + b^2\sigma^2 + c^2\sigma^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

eftersom $\sigma = 1$. Sätt in siffror.

e) Beräkna variansen för den andra skattningen på samma sätt. Den som har minst varians är effektivast men i dessa uppgifter visar det sig att variansen är densamma, de är lika effektiva.