Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I
SF1900/SF1912/SF1914/1915/1916 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 18 SEPTEMBER 2019 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

Man kan ibland läsa att hälften av alla som drunknat till sjöss har druckit alkohol. Låt oss anta att det stämmer. Låt oss vidare anta att av alla som är ute på sjön är andelen som drunknar en på hundratusen. Vi antar också att 1% av alla som är ute på sjön har druckit alkohol. Bestäm under dessa antaganden sannolikheten att den som druckit alkohol och ger sig ut på sjön drunknar.

Uppgift 2

En kontinuerlig stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{om } x > 0, \\ 0 & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

Bestäm sannolikheten att den stokastiska variabel X antar ett värde som är större än 6.

Uppgift 3

De stokastiska variablerna X och Y har standardavvikelserna $D(X) = 2$ och $D(Y) = 3$, och är oberoende. Beräkna standardavvikelsen av $Z = 2X - Y + 3$.

Var god vänd!

Uppgift 4

De stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(j,k)$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Således antar X alltså värdena 0 eller 1, medan Y antar värdena 0, 1, eller 2. Bestäm $C(X,Y)$.

Ledning: Det gäller att $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Uppgift 5

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_5$ vara oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet $[0,1]$, dvs deras fördelningsfunktioner ges av

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0, \\ x & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 5 \\ 1 & \text{om } x > 1. \end{cases}$$

Låt $Z = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_5\}$. Bestäm $E(Z)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Låt händelsen A vara att man druckit alkohol och händelsen D vara att man drunknar. Då kan påståendet skrivas $P(A|D) = 0.5$. Vidare antar vi alltså att $P(D) = 10^{-5}$ och att $P(A) = 0.01$. Sökt är $P(D|A)$.

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|D)P(D)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 10^{-5}}{0.01} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Svar: $5 \cdot 10^{-4}$

Uppgift 2

$P(X > 6) = \int_6^\infty f_X(x)dx = \int_6^\infty 0.5e^{-0.5x}dx = [-e^{-0.5x}]_6^\infty = e^{-3} = 0.0498$

Svar: 0.0498

Uppgift 3

$V(Z) = V(2X - Y + 3) =$[ober]$= V(2X) + V(Y) = 2^2V(X) + V(Y) = 4 \cdot 4 + 9 = 25.$
$D(Z) = \sqrt{V(Z)} = 5$

Svar: 5

Uppgift 4

Genom att summera över kolumner, respektive rader, erhåller man de marginella sannolikhetsfunktionerna $p_X(j)$, respektive $P_Y(k)$ enligt

$p_{X,Y}(j,k)$	0	1	2	$p_X(j)$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
$p_Y(k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

Vi får nu att

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \\
E(Y) &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \\
E(XY) &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \\
C(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot \frac{11}{12} = -\frac{17}{144}
\end{aligned}
$$

Vid beräkningen av $E(XY)$ har endast de nollskilda termerna tagits med.

Svar: $C(X,Y) = -17/144 \approx -0.118$

Uppgift 5

$F_Z(z) = z^5$ och $f_Z(z) = 5z^4$ för $z \in [0,1]$. Vidare får vi

$$E(Z) = \int_0^1 z f_Z(z) dz = 5 \int_0^1 z^5 dz = 5/6.$$

Svar: $5/6 = 0.833$.