Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL KS SF1912/SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAGEN DEN 22:a SEPTEMBER 2021 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på uppgift 2, 4 och 5. På uppgift 1 och 3 skall ett av de givna alternativen anges som svar. För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Efternamn:

Förnamn:

Personnummer:

SVAR

1. D
2. 2.83
3. B
4. 6
5. 0.45

LÖSNINGSFÖRSLAG

Uppgift 1

Ur en urna med tre röda och tre blåa kulor drar man slumpmässigt en kula och lägger undan den utan att veta färgen på den. Efter det drar man återigen slumpmässigt utan återläggning två kulor till ur urnan. Beräkna sannolikheten att dessa två kulor båda är röda.

Lösning Vi delar upp i två fall, beroende på första kulans färg. Att första kulan är blå, är lika sannolikt som att den är röd. Om första kulan är blå, är sannolikheten att dra två röda kulor precis (enligt hypergeometrisk fördelning)

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = 0.3.$$

Om första kulan är röd, får vi istället

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 0.1.$$

Slutligen, lagen om total sannolikhet ger då att sannolikheten vi söker är P(2 röda| första är blå)P(första är blå) + P(2 röda | första är röd)P(första är röd) $= 0.3 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.2$, dvs det korrekta svarsalternativet är D.

Uppgift 2

En stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2a}, & \text{om } 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

där konstanten a är okänd. Ange det numeriska värdet för medianen $\tilde{x}$, där $\tilde{x}$ bestäms av att $P(X < \tilde{x}) = 0.5$.(Medianens värde skall alltså inte anges som en funktion av a.)

Lösning

Vi bestämmer först a så att $f_X(x)$ blir en täthetsfunktion. Villkoret för det är att

$$\int_0^a \frac{x}{2a} dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{4a}\right]_{x=0}^{x=a} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$P(X < \tilde{x}) = 0.5 \Rightarrow \int_0^{\tilde{x}} \frac{x}{8} dx = 0.5 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{16}\right]_{x=0}^{x=\tilde{x}} = 0.5 \Rightarrow \tilde{x} = \sqrt{8} = 2.83$$

Uppgift 3

Täthetsfunktionen för en slumpvariabel X är plottad nedan. Bestäm väntevärdet för X. Svaret är något av talen 0.50, 0.55, 0.65, 0.72, 0.93, och 1.00.

Lösning
Vi måste beräkna $\int_0^1 x \cdot f_X(x)\,dx$. Denna integral delas upp i tre intervall, som motsvarar var $f(x)$ är konstant. Vi får

$$\int_0^{0.25} x \cdot 0.5\,dx = 0.5 \cdot \left[x^2/2\right]_0^{0.25} = \frac{1}{64}$$
$$\int_{0.25}^{0.75} x \cdot 1.25\,dx = 1.25 \cdot \left[x^2/2\right]_{0.25}^{0.75} = \frac{20}{64}$$
$$\int_{0.75}^{1} x \cdot 1\,dx = \left[x^2/2\right]_{0.75}^{1} = \frac{14}{64}$$

Totalsumman blir $\frac{35}{64} = 0.55$, vilket är väntevärdet för X, dvs det korrekta svarsalternativet är B.

Uppgift 4

De stokastiska variablerna X och Y har standardavvikelserna $D(X) = 2$ och $D(Y) = 5$. De är beroende på så sätt att kovariansen är $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 8$. Beräkna standardavvikelsen av $4X - 2Y + 3$.

Lösning

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(4X - 2Y + 3) &= \mathrm{Var}\,(4X - 2Y) \\
&= 4^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X) + (-2)^2 \cdot \mathrm{Var}\,(Y) + 2\,\mathrm{Cov}\,(4X, -2Y) \\
&= 16 \cdot \mathrm{Var}\,(X) + 4 \cdot \mathrm{Var}\,(Y) + 2 \cdot 4 \cdot (-2)\,\mathrm{Cov}\,(X, Y) \\
&= 16 \cdot 2^2 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot 8 \\
&= 36
\end{aligned}$$

Därmed blir

$$\mathrm{D}\,(4X - 2Y + 3) = \sqrt{\mathrm{Var}\,(2X - 3Y + 7)} = \sqrt{36} = 6$$

Uppgift 5

Låt X och Y vara diskreta stokastiska variabler sådana att $P(X = 1) = 0.6$, $P(X = 0) = 0.4$, $P(Y = 1) = 0.7$, $P(Y = 0) = 0.3$, samt $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0.25$ och $P(X = 0 \cap Y = 1) = 0.15$. Bestäm $P(X + Y < 2)$.

Lösning

Lagen om total sannolikhet säger att $P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = P(X = 0 \cap Y = 1) + P(X = 1 \cap Y = 1)$, så $0.7 = 0.15 + P(X = 1 \cap Y = 1)$. Detta ger oss $P(X = 1 \cap Y = 1) = 0.55$. Nu, $X + Y$ kan anta värdena 0, 1 och 2. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
P(X + Y < 2) &= 1 - P(X + Y = 2) \\
&= 1 - P(X = 1 \cap Y = 1) \\
&= 1 - 0.55 = 0.45.
\end{aligned}$$