Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1917/SF1919 SANNOLIKHETSTERORI OCH STATISTIK, ONSDAG 24 NOVEMBER 2021 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

A, B och C är tre händelser sådana att
A och B är disjunkta,
B och C är oberoende,
A och C är oberoende.
Vidare gäller att $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.3$ och $P(C) = 0.4$.
Beräkna den betingade sannolikheten $P(A \mid B \cup C^*)$ (C^* är komplementet till C).

Uppgift 2

När Kalle skiver på sin dator så händer det att han trycker på fel tangent. Låt X vara antalet feltryckningar per 5-minutersperiod. Antag att X är en Poissonfördelad stokastisk variabel, $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, k = 0, 1, 2, 3, ...$ Antag vidare att det förväntade antalet feltryckningar under 5 minuter är lika med 2, dvs $\mu = E(X) = 2$. Beräkna sannolikheten att Kalle gör minst två feltryckningar på en 5-minutersperiod.

Var god vänd!

Uppgift 3

De kontinuerliga stokastiska variablerna X och Y har den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{9}{8}x^2y^2, & \text{om } 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $P(X > 1)$.

Uppgift 4

Låt X, Y vara två diskreta stokastiska variabler med simultan sannolikhetsfunktion $p_{X,Y}(x,y)$ vars värden ges av tabellen:

$p_{X,Y}(x,y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	0.1	0.2	0.1
$x = 1$	0.1	0.2	0
$x = 2$	0.1	0.1	0.1

Beräkna $P(X + Y = 2)$.

Uppgift 5

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & \text{om } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $E(X)$. Svaret skall anges som ett numeriskt värde, dvs inte som en funktion av k.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

$$P(A \mid B \cup C^*) = \frac{P(A \cap (B \cup C^*))}{P(B \cup C^*)} = \{\text{disj}\} = \frac{P(A \cap C^*)}{P(B \cup C^*)} =$$

$$= \frac{P(A \cap C^*)}{P(B) + P(C^*) - P(B \cap C^*)} = \{\text{ober}\} = \frac{P(A)P(C^*)}{P(B) + P(C^*) - P(B)P(C^*)} =$$

$$= \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.3 + 0.6 - 0.3 \cdot 0.6} = 7/12 = 0.58.$$

Uppgift 2

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (e^{-2} + 2e^{-2}) = 0.594$$

Uppgift 3

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy = [\text{här}] \ = \int_0^1 \frac{9}{8}x^2y^2dy = \frac{3}{8}x^2$$

$$P(X > 1) = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2dx = 1 - \frac{1}{8} = 0.875$$

Uppgift 4

$$P(X + Y = 2) = p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 0) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$

Uppgift 5

$$1 = \int_0^1 k\sqrt{x}\ dx = k \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{3/2}\ dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$