Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1922/SF1923/SF1924
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAGEN DEN 13:e APRIL 2022 KL 08.00–10.00.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Efternamn:

Förnamn:

Personnummer:

Uppgift 1

Vi har tre händelser, A, B, och C. A och B är oberoende. A och C är disjunkta. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.4$, $P(C^*|B) = 0.8$. (C^* är komplementet till C.)

Beräkna $P(B \cap A^* \cap C^*)$.

Uppgift 2

Två kompisar ska dela på en godisask med åtta påskägg i. Äggen är *identiska* till utseendet men kommer i två olika smaker: en typ av ägg innehåller enbart choklad och den andra typen innehåller även marsipan. Asken innehåller fyra ägg av varje sort (dvs. fyra choklad, fyra med marsipan) och kompisarna tar fyra ägg var. Vad är sannolikheten att de båda får två ägg av varje smak?

Uppgift 3

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm $V(2X)$.

Var god vänd!

Uppgift 4

De stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

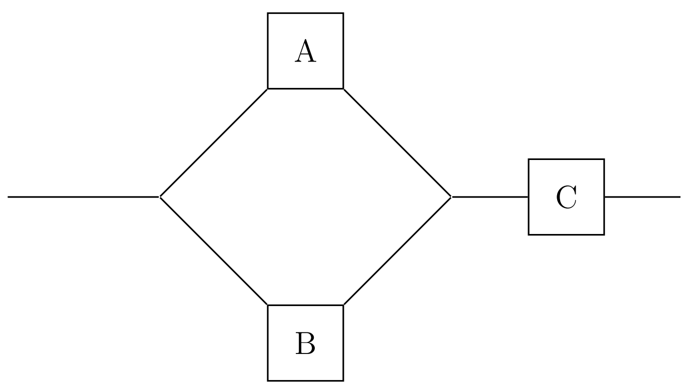
$p_{X,Y}(x,y)$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=2$	0.2	0	0.2
$Y=4$	0.2	0.1	0.3

Således antar X värdena 1, 2 och 3, medan Y antar värdena 2 och 4.

Beräkna $P(Y+2X \geq 7)$.

Uppgift 5

En maskin består av tre komponenter, A, B, och C. Där A och B är parallellkopplade och C är seriekopplad med A och B, se schemat i bilden nedan. För att maskinen ska fungera måste man kunna ta sig från vänster till höger i bilden genom fungerande komponenter. Komponenterna går sönder oberoende av varandra. Sannolikheten att A går sönder = sannolikheten att B går sönder = 0.4 och sannolikheten att C går sönder= 0.2.



Beräkna sannolikheten att maskinen fungerar.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Vi börjar med att skriva om sannolikheten som en betingad sannolikhet m.a.p. B:

$$P(B \cap A^* \cap C^*) = P(A^* \cap C^* | B)P(B).$$

Vidare vill vi använda att $A \cap C = \emptyset$. Komplementet av händelsen $A^* \cap C^*$ är $A \cup C$ och A och C disjunkta medför därför att $P(A^* \cap C^*) = 1 - (P(A) + P(C))$. Det gäller även när vi betingat på B och vi har

$$P(A^* \cap C^* | B) = 1 - P(A|B) - P(C|B) = 1 - P(A) + (1 - P(C^*|B)),$$

där vi också använt att A och B är oberoende. Sätter vi in de givna sannolikheterna får vi då

$$\begin{aligned} P(B \cap A^* \cap C^*) &= (1 - P(A) - (1 - P(C^*|B)))\, P(B) \\ &= (1 - 0.3 - 0.2) \cdot 0.6 \\ &= 0.300 \end{aligned}$$

Uppgift 2

Vi kan lösa uppgiften med multiplikationsprincipen, alternativt genom att identifiera situationen som utfallet av en hypergeometrisk s.v.. Om vi går från första princip, dvs. den klassiska sannolikhetsdefinitionen, noterar vi först att totala antalet sätt att välja fyra ägg av de åtta i asken är $\binom{8}{4}$. Vidare finns det $\binom{4}{2}$ sätt att välja två av fyra ägg med chokladsmak, samt $\binom{4}{2}$ sätt att välja två av fyra ägg med marsipan.
Den klassiska sannolikhetsdefinitionen säger då att sannolikheten att välja två av varje sort är

$$\begin{aligned} P(\text{två choklad, två marsipan}) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} \\ &= \frac{36}{70} \\ &= 0.514. \end{aligned}$$

Alternativt låter vi X vara antalet ägg med chokladsmak som väljs av en av kompisarna (av symmetri spelar det ingen roll vilken av de två). Vi är då intressearde av $P(X = 2) = p_X(2)$, där p_X är sannolihetsfunktionen för X. Vidare identifierar vi fördelningen för X som hypergeometrisk med parametrarna $N = 8$ (totala antalet godisbitar att välja mellan), $n = 4$ (hur många bitar som väljs), $p = 0.5$ (andelen ägg med chokladsmak vid start). Sannolikhetsfunktionen för $Hyp(8, 4, 0.5)$, utärderad i $k = 2$, ger

$$p_X(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = 0.514.$$

Uppgift 3

Vi beräknar variansen enligt

$$V(2X) = 4V(X) = 4\left(E[X^2] - E[X]^2\right).$$

Vi börjar med $E[X^2]$. Med den angivna täthetsfunktionen får vi

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x^2 4x^3 dx \\
&= \int_0^1 4x^5 dx \\
&= \left[\frac{4x^6}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{6}.
\end{aligned}$$

På samma sätt beräknar vi $E[X]$ till

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 x f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 x4x^3 dx \\
&= \int_0^1 4x^4 dx \\
&= \left[\frac{4}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Kombinerat ger räkningarna nu

$$\begin{aligned}
V(2X) &= 4\left(E[X^2] - E[X]^2\right) \\
&= 4\left(\frac{4}{6} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) \\
&= 4\left(\frac{2}{3} - \frac{16}{25}\right) \\
&= 4\left(\frac{50-48}{75}\right) \\
&= 4 \cdot \frac{2}{75} \\
&= \frac{8}{75} \\
&= 0.107
\end{aligned}$$

Uppgift 4

Vi har att

$$P(Y+2X \geq 7) = \sum_{x,y:y+2x\geq 7} p_{X,Y}(x,y),$$

Givet sannolikhetsfunktionen $p_{X,Y}$ behöver vi därför identifiera vilka par (x,y) som ger $y+2x \geq 7$: $(2,4)$, $(3,2)$ och $(3,4)$. Vi får då

$$\begin{aligned} P(Y+2X \geq 7) &= p_{X,Y}(2,4) + p_{X,Y}(3,2) + p_{X,Y}(3,4) \\ &= 0.1 + 0.2 + 0.3 \\ &= 0.600. \end{aligned}$$

Uppgift 5

Vi låter A, B, C vara händelserna att motsvarande komponent fungerar. Då har vi givet att $P(A^*) = P(B^*) = 0.4$ och $P(C^*) = 0.2$, samt att A, B och C är oberoende.
Händelsen att maskinen fungerar kan skrivas som

$$[A \cap B \cap C] \cup [A^* \cap B \cap C] \cup [A \cap B^* \cap C],$$

vilket är en union av tre disjunkta händelser. Vi har därför att

$$\begin{aligned} P(\text{maskinen fungerar}) &= P\left([A \cap B \cap C] \cup [A^* \cap B \cap C] \cup [A \cap B^* \cap C]\right) \\ &= P(A \cap B \cap C) + P(A^* \cap B \cap C) + P(A \cap B^* \cap C). \end{aligned}$$

Vi kan beräkna var och en av de tre sannolikheterna i högerledet med hjälp av antagandet att komponenterna går sönder oberoede av varandra. Vi får

$$\begin{aligned} P(\text{maskinen fungerar}) &= P(A \cap B \cap C) + P(A^* \cap B \cap C) + P(A \cap B^* \cap C) \\ &= P(A)P(B)P(C) + P(A^*)P(B)P(C) + P(A)P(B^*)P(C) \\ &= P(C)\left(P(A)P(B) + P(A^*)P(B) + P(A)P(B^*)\right) \\ &= 0.8\,(0.6 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6) \\ &= 0.672. \end{aligned}$$

Som ett alternativ kan vi också se händelsen $\{\text{maskinen fungerar}\}$ som snittet av C samt $\{A \text{ och/eller } B \text{ fungerar}\} = A \cup B$. Från oberoendeantagandet får vi då

$$\begin{aligned} P(\text{maskinen fungerar}) &= P\left(C \cap (A \cup B)\right) \\ &= P(C)\left[P(A \cup B)\right] \\ &= P(C)\left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right] \\ &= P(C)\left[P(A) + P(B) - P(A)P(B)\right] \\ &= 0.8 \cdot \left[0.6 + 0.6 - 0.6^2\right] \\ &= 0.672. \end{aligned}$$