Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1912/SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 21 SEPTEMBER 2022 KL 08.00–10.00.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

Givet två händelser A och B, sådana att $P(A|B) = 0.50$, $P(B|A) = 0.80$ och $P(A \cup B) = 0.20$.

Bestäm $P(A)$.

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(a-x) & \text{om } \ 0 < x \leq a, \\ 0 & \text{annars }, \end{cases}$$

där a är en okänd konstant.

Bestäm konstanten a.

Uppgift 3

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{9}{8}x^2y^2 & \text{om } \ 0 \leq x \leq 2\,,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna väntevärdet $E(X)$.

Var god vänd!

Uppgift 4

Låt X vara en diskret stokastisk variabel som kan anta följande fyra värden : 0, 3, 6, och 8, där vi vet att $P(X = 0) = 0.2$ och att $P(X = 8) = 0.2$. Vidare vet vi att väntevärdet $E(X) = 4$.

Beräkna variansen $V(X)$.

Uppgift 5

De stokastiska variablerna X, Y, och Z har standardavvikelserna $D(X) = 2$, $D(Y) = 2$, och $D(Z) = 2$. X och Y är beroende på så sätt att kovariansen $\mathrm{C}(X, Y) = -0.5$. X och Z är beroende på så sätt att kovariansen $\mathrm{C}(X, Z) = 1$. Y och Z är oberoende.

Beräkna variansen $V(X + 2Y - Z)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Enligt definitionen av betingad sannolikhet har man $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ och $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Av detta fås $P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}P(A)$ och $P(A\cap B) = P(B|A)P(A)$. Dessa uttryck kan sättas in i additionsformeln $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$, vilket ger
$P(A\cup B) = P(A) + \frac{P(B|A)}{P(A|B)}P(A) - P(B|A)P(A) = \left(1 + \frac{P(B|A)}{P(A|B)} - P(B|A)\right)P(A)$. Med insatta värden fås $\frac{1}{5} = \left(1 + \frac{4/5}{1/2} - \frac{4}{5}\right)P(A) = \frac{9}{5}P(A)$. Alltså fås $P(A) = \frac{1}{9} \approx 0.111$

Uppgift 2

Integralen av täthetsfunktionen mellan $-\infty$ och ∞ måste vara 1. Alltså
$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^a \frac{3}{4}x(a-x)dx = \frac{3}{4}\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{8}$, vilket ger $a = 2$.

Uppgift 3

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^1 x\left(\frac{9}{8}x^2y^2\right)dy = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{16}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Uppgift 4

$E(X) = 0p_X(0) + 3p_X(3) + 6p_X(6) + 8p_X(8) =$[summan av alla sannolikheter är 1] $= 0\cdot 0.2 + 3\cdot a + 6\cdot(0.6-a) + 8\cdot 0.2$.
$\Rightarrow 4 = 3a - 6a + 3.6 + 1.6 \Rightarrow a = 0.4$. Dvs. $p_X(3) = 0.4$ och $p_X(6) = 0.2$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
$E(X^2) = 0^2\cdot p_X(0) + 3^2\cdot p_X(3) + 6^2\cdot p_X(6) + 8^2\cdot p_X(8) = 0^2\cdot 0.2 + 3^2\cdot 0.4 + 6^2\cdot 0.2 + 8^2\cdot 0.2 =$
$= 3.6 + 7.2 + 12.8 = 23.6$
Dvs. $V(X) = 23.6 - 4^2 = 7.6$

Uppgift 5

$V(X+2Y-Z) = V(X+2Y) + V(-Z) + 2C(X+2Y,-Z) =$
$= V(X) + V(2Y) + 2C(X,2Y) + V(Z) + 2C(X,-Z) =$
$= V(X) + 4V(Y) + 4C(X,Y) + V(Z) - 2C(X,Z) = 4 + 16 - 2 + 4 - 2 = 20$