Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1917/SF1918/SF1919
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 23 NOVEMBER 2022 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

En hiss lämnar källaren med åtta personer och stannar på alla de återstående elva våningarna. Om vi antar att det för var och en av dessa åtta personer gäller att varje våning av de återstående elva är lika sannolik att kliva av på, vad är då sannolikheten att ingen av dem kliver av på samma våning? Dvs., vad är sannolikheten att de åtta personerna kliver av på åtta olika våningar?

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A \cap B^*) = 0.2$, $P(A^* \cap B) = 0.4$ och $P(A \cup B) = 0.8$. Bestäm den betingade sannolikheten $P(B|A)$.

Uppgift 3

Inom en cirkel med en radie på 4 meter väljs 3 punkter slumpmässigt och oberoende av varandra (på så sätt att varje gång man väljer punkt så har varje punkt inuti cirkeln samma sannolikhet att bli vald). Vad är sannolikheten att avståndet mellan cirkelns mitt och den innersta av de tre valda punkterna är mer än 2 meter?

Var god vänd

Uppgift 4

Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{om} \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{om} \quad x > 2. \end{cases}$$

Bestäm väntevärdet $E(e^{-2X})$.

Uppgift 5

$V(2X + Y) = 8$. $V(2X - Y) = 2$. $V(Y) = 4$. Bestäm standardavvikelsen $D(X)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

$$P(\text{Alla väljer olika våningsplan}) = \frac{\text{antal gynnsamma utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11^8} = 0.0310$$

Uppgift 2

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cup B) - P(A \cap B^*) - P(A^* \cap B)}{(P(A \cup B) - P(A^* \cap B)} = \frac{0.8 - 0.2 - 0.4}{0.8 - 0.4} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

Uppgift 3

Låt X_i vara punkt i:s avstånd till cirkelns mitt.

Vi söker

$P(min(X_1, X_2, X_3) > 2) = P(X_1 > 2 \cap X_2 > 2 \cap X_3 > 2) = [\text{oberoende}] = P(X_1 > 2) \cdot P(X_2 > 2) \cdot P(X_3 > 2)$

$$P(X_i > 2) = 1 - PX_i < 2) = 1 - \frac{\pi \cdot 2^2}{\pi \cdot 4^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow P(min(X_1, X_2, X_3) > 2) = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} = 0.422$$

Uppgift 4

Täthetsfunktionen $f_X(x) = 1/2$, om $0 \leq x \leq 2$, och 0, annars. Därför, har vi:

$$E(e^{-2X}) = \int_0^2 e^{-2x} f_X(x)dx = \int_0^2 e^{-2x}(0.5)dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \int_0^2 e^{-2x} d(-2x) = \frac{-1}{4}\Big(e^{-4} - 1\Big) =$$

$$= \frac{1 - e^{-4}}{4} = \frac{e^4 - 1}{4e^4} = 0.245.$$

Uppgift 5

$V(2X+Y)=8$. $V(2X-Y)=2$. $V(Y)=4$. Bestäm standardavvikelsen $D(X)$.

$V(2X+Y)=V(2X)+V(Y)+2C(2X,Y)=4V(X)+V(Y)+4C(X,Y)=8$

$V(2X-Y)=V(2X)+V(-Y)+2C(2X,-Y)=4V(X)+V(Y)-4C(X,Y)=2$

Tar vi nu den första ekvationen minus den andra får vi att

$8C(X,Y)=6$ Alltså är $C(X,Y)=0.75$.

Nu kan vi t.ex. sätta in det i första ekvationen och får då

$4V(X)+V(Y)+4\cdot 0.75=8 \Rightarrow 4V(X)+4+3=8 \Rightarrow V(X)=0.25 \Rightarrow D(X)=0.5$